

斥力在宇宙学中的 应用

冯天岳 著

文津出版社

(京)新登字 205 号

内 容 简 介

宇宙斥力是理论物理学和天文学的基础理论之一。

本书给出斥力的计算公式和斥力常数的数值；应用斥力建立起后星系宇宙模型，从而解释了类星体的高红移；计算出类星体哈勃中的拟合曲线，并且预言类星体的红移值不大于 8。附录给出使用程序袖珍电算器的详细计算方法和全部数据，读者可自行验算。

读者对象：科研人员、理工科大学师生。

斥力在宇宙学中的应用

CHILI ZAI YUZHOUXUE ZHONG DE
YING YONG

冯天岳 著

*

文津出版社出版

(北京北三环中路 6 号)

邮政编码：100011

北 京 出 版 社 总 发 行

新华书店北京发行所经销

经贸大学印刷厂印刷

•

787×1092毫米 32开本 2.75印张52000字

1994年1月第1版 1994年1月第1次印刷

印数 1—1000

ISBN 7-80554-206-6/N·1

定价：2.90元

目 录

引言	(1)
一、斥力定律及计算公式	(3)
(一) 斥力定律	(3)
(二) 实心球的引力场	(3)
(三) 临界距离	(4)
二、后星系宇宙模型	(5)
(一) 宇宙参数	(5)
1. 宇宙半径	(5)
2. 宇宙中心	(6)
3. 膨胀系数	(6)
4. 宇宙常数	(8)
5. 宇宙场强	(8)
6. 哈勃常数	(10)
7. 平均质量密度	(12)
8. 膨胀年龄	(13)
9. 红移	(14)
(二) 计算方法	(17)
1. 最外层的计算	(17)
2. 球内的计算	(19)
3. 球外的计算	(20)
4. $Z-r$ 关系	(20)
5. 红移—星等关系	(21)

(三) 计算结果	(21)
1. 宇宙参数	(21)
2. $Z-r$ 图	(23)
3. Z_{max} 的合理范围	(23)
4. $Z-m$ 图	(25)
(四) 类星体视星等下限的意义	(27)
(五) 相对论修正	(28)
三、总结	(29)
四、问题	(31)
五、结束语	(32)
六、参考文献	(33)
七、附录	(34)
(一) 没有蓝移天体的原因	(34)
(二) 哈勃常数与距离的关系	(34)
(三) 年龄方程的解法	(35)
(四) 速度红移的相对论修正	(36)
(五) 斥力红移公式的推导	(38)
(六) 球面的计算过程	(39)
(七) 球内的计算公式	(41)
(八) 球外的计算公式	(42)
(九) $Z-r$ 的计算方法	(44)
(十) 公式 (44) 的推导	(44)
(十一) 最外层的计算结果	(46)
(十二) 宇宙参数的选择范围	(52)
(十三) $Z-r$ 曲线的数据	(54)
(十四) $Z-m$ 曲线的数据	(55)
(十五) a , A_0 和 A 的数据	(57)

(十六) 计算程序中设置的常数数值	(63)
(十七) 图 3 中曲线的数据	(70)
八、增补	(72)
(一) 文献 [1] 的原文	(72)
(二) “全天相干”的比喻	(77)
(三) 哈勃常数的观测值	(78)
(四) 宇宙年龄	(79)
(五) 宇宙的质量和密度	(81)
(六) 视平均绝对星等	(82)

2013. 7. 8

用平板扫描仪制作

冯

引 言

“我们至今所能达到的最远的距离为1.5亿光年，但在这个距离内我们已经发现天体在分散着，好像是受了一种扩散力似的。我们暂时在这里这样结论，宇宙斥力已获得胜利，而支配着扩散。”*

——A.S.爱丁顿，1932年

历史上早就有一些著名学者，他们猜测存在着与距离成正比的斥力。限于当时的科学水平，使天文观测的距离不能够很遥远，所以觉察不到斥力的影响。应当说，近代天文学的成就为斥力定律的发现提供了必然性。

事实上，只须简单的推算就知道斥力只能是距离的一次函数，其作用常数的数量级是 10^{-88} (SI制)。斥力与距离的其它函数形式，例如 $F \propto r^2$ ， $F \propto r^{\frac{1}{2}}$ 等等，都得到与观测明显不符的结果。

显然，斥力只在大尺度上（宇观上）起作用，在实验室中无法测定斥力常数的数值。唯一的办法是应用斥力定律建立一个宇宙模型，然后，一方面考查这个模型的合理性和真实性，另一方面验证这个模型所推断出的结论和预言。如果模型获得成功，就可以规定斥力常数的采用值。现在的研究表明，由斥力定律所建立起的宇宙模型得到了与观测相符的结

* A.S.爱丁顿著，《膨胀的宇宙》，曹大同译，商务印书馆，1940年。

果，从而解决了许多重大疑难问题。

由于斥力只对宏观物体的运动有影响，所以它只能用来研究星系形成以后的宇宙模型，即后星系宇宙模型。

本文给出了用袖珍程序电算器进行计算的详细数据和办法，这对业余研究者提供了很大的方便。

计算的主要结果列入表1。

文中采用的符号和单位如表1所示。基本常数的数值采用

$$G = 6.672 \times 10^{-11} \text{ 牛顿} \cdot \text{米}^2 / \text{千克}^2$$

$$c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ 米/秒}$$

表1 宇宙参数

名 称	符 号	单 位	数 值
平均密度	ρ	10^{-30} 克/厘米^3	1.75
哈勃常数	H	公里/秒 · Mpc	68
哈勃常数最大值	$H_{\max}$	公里/秒 · Mpc	85
质量	M	10^{32} 千克	1.00
膨胀系数	μ		0.402
斥力常数	Λ_0	$10^{-88} \text{ 1/千克} \cdot \text{秒}^2$	7.53
宇宙常数	Λ	$10^{-88} \text{ 1/千克} \cdot \text{秒}^2$	7.04
最外层视半径 ($Z=2.3$)	a	Gpc	3.59
初半径 (临界距离)	a_0	Gpc	1.45
最大红移	$Z_{\max}$		5.78
宇宙视膨胀年龄	t_e	亿年	310
视界 (观测的极限)	r_s	Gpc	4.41
任意半径	r	Gpc	

一、斥力定律及计算公式

(一) 斥力定律

$$F = A_0 M m r \quad (1)$$

式中 M 和 m 是两个物体的质量，它们质心之间的距离是 r ，它们之间的斥力是 F ， A_0 是斥力常数。

假定斥力与引力有相同的传播速度。

可以证明，无论物体的形状和大小如何，它所产生的或受到的斥力，就如同它的质量全都集中在质心上一样^[1]。

斥力场的强度是

$$E = A_0 M r \quad (2)$$

斥力势的规定：质心的斥力势为零，离质心的距离为 r 的地方，其斥力势是

$$\phi = -\frac{1}{2} A_0 M r^2 \quad (3)$$

负号表示离质心越远，斥力势越低。

(二) 实心球的引力场

半径为 a 的均匀实心球，与球心相距为 r 的地方，其引力

场强的大小是*

$$\frac{GM}{a^3}r \quad (4)$$

实心球的引力势是

$$-\frac{GM}{r} \quad (r \geq a) \quad (5)$$

$$-\frac{GM}{a} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{a^2} \right) \quad (r \leq a) \quad (6)$$

这是泊松方程的解**.

(三) 临界距离

两个物体之间的距离为某一数值时, 它们之间的引力与斥力等值, 这个距离叫临界距离 a_0 . 因此有等式

$$G \frac{Mm}{r^2} = \Lambda_0 Mmr$$

即

$$\Lambda_0 = \frac{G}{a_0^3} \quad (7)$$

为了确定 Λ_0 , 唯一的办法就是借助于天文学的观测资料, 找到 a_0 的近似值.

* C. 基特等著.《力学》(伯克利物理教程), 第一卷 § 9.2, 科学出版社, 1979年.

** 张秋光.《场论》上册, p198, 地质出版社, 1983年.

二、后星系宇宙模型

(一) 宇宙参数

1. 宇宙半径

假定在宇宙中存在着许多小宇宙。由于某种原因，我们的这个小宇宙是个球状体，而且不断的扩大。当它的半径达到临界距离 a_0 时，就开始斥力膨胀，所以这个半径叫临界半径或初半径。

由于类星体的数量从红移 $Z = 2.3$ 以后显著减少(图1)[2]，所以定义 $Z = 2.3$ 所对应的距离为宇宙最外层的视半径 a 。

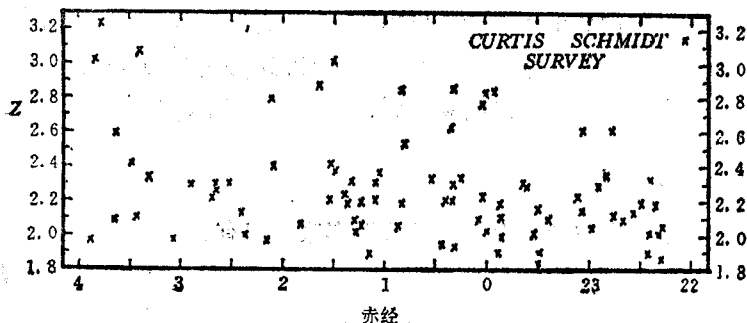


图1 红移的空间分布

2. 宇宙中心

宇宙开始斥力膨胀后，宇宙中心区域的物质在斥力的作用下不得不离开中心，从而形成空洞，而且空洞越来越大。

有理由认为人类位于小宇宙的核心区域，例如：

▲ 在空间上分布的对称性，诸如红移的分布、星系的分布、射电源的分布、类星体的分布、背景辐射等等。

▲ 没有观测到一定空间范围的蓝移，而红移的空间分布又是比较对称（附录1）。

▲ 大尺度上“全天相干”[3]，表明我们确实位于干涉中心*。

这些都是众所周知的事实。

因此，可以断言，宇宙中心就是离我们最近最大的空洞。空洞的周围布满星系，也可以说是被大的超星系团包围着，因为沿周向的引力仍然阻碍着膨胀。

空洞中有时有少量天体，原因是天体的爆发物可以进入空洞。

当然，以上的观点是基于斥力假设。

小宇宙的中心在牧夫星座[4]；它是一个半径为 $40Mpc$ 的空洞，我们到宇宙中心的距离是 $200Mpc$ （图2）[5]。

人类是得天独厚的观测者。

3. 膨胀系数

假定宇宙的斥力膨胀是线性膨胀，则有

* 方励之等，《宇宙的创生》，p172，科学出版社，1987年。

方励之，《自然杂志》，9，3（1986）。

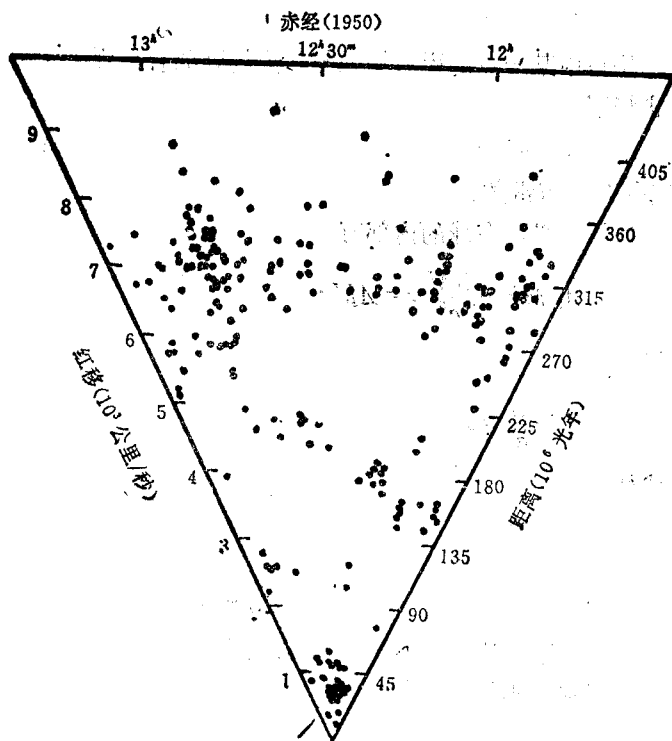


图2 牧夫星座的巨大空洞

$$r_0 = \mu r \quad \text{和} \quad a_0 = \mu a \quad (8)$$

其中 μ 是膨胀系数， r_0 是膨胀前天体的位置， r 是膨胀后天体的位置。

虽然膨胀是非线性的，但是可以用线性膨胀作为它的近似，这样给计算带来很大的方便，而又不影响问题的结论。

4. 宇宙常数

宇宙中某一点的引力场强与斥力场强的合场强，定义为宇宙场强

$$C = \Delta M r \quad (9)$$

其中 Δ 是宇宙常数。

根据定义，在球的内部有

$$\Delta_0 M r - \frac{GM}{a^3} r = \Delta M r$$

所以

$$\Delta_0 - \frac{G}{a^3} = \Delta \quad (10)$$

在球外

$$\Delta_0 - \frac{G}{r^3} = \Delta \quad (11)$$

当宇宙半径为 a_0 时，有 $\Delta = 0$ ；当 $a \gg a_0$ 时， $\Delta = \Delta_0$ 。由于退行物体的速度达到光速时，我们就看不见它了*，所以我们观测不到与 Δ_0 相对应的膨胀。

5. 宇宙场强

球内的宇宙场强是

$$C = \Delta_0 M r - \frac{GM}{a^3} r \quad (12)$$

球外的宇宙场强是

* J. 辛格.《现代宇宙学的观念和理论》，p154，科学出版社，1986年。

$$C = A_0 M r - \frac{GM}{r^2} \quad (13)$$

从上面两个公式看出，斥力场强是距离的一次函数，即直线；引力场强分为两部分，球内部分是直线，球外部分是指数曲线。把表1中的数值代入公式(12)和(13)得到图3(附录17)。

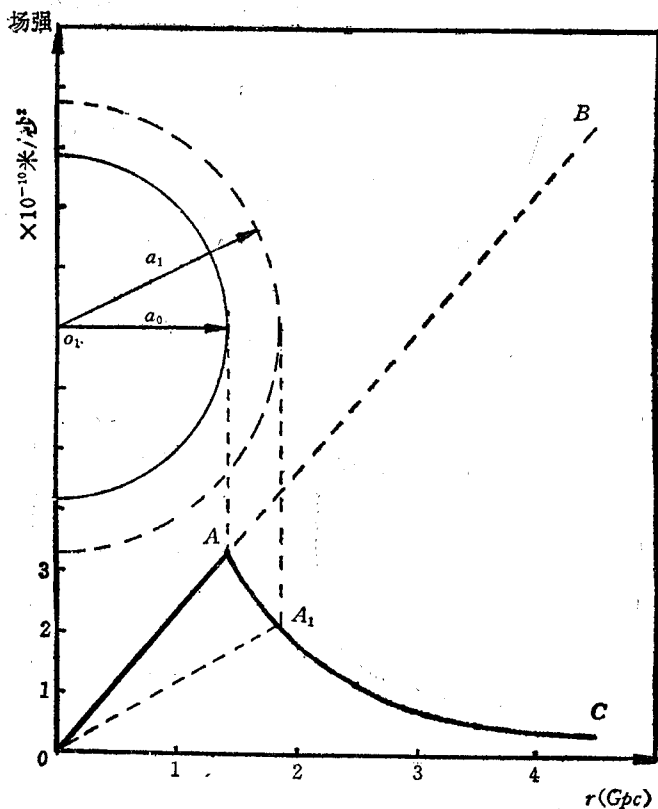


图3 宇宙场强 $C = f(a, r)$

当宇宙半径为 a_0 时，球面上的宇宙场强为零，球内的宇宙场强处处为零，即直线 OA ；球外的引力场强的大小是曲线 AC ，斥力场强的大小是直线 AB ，宇宙场强的大小恰好用 AB 与 AC 之间的竖直线段的长短来表示。

随着宇宙的膨胀，半径达到 a_1 。这时，球内的引力场强是线段 OA_1 ，球外的引力场强是 A_1C ；球内与球外的斥力场强是直线 OB 。宇宙场强的大小是直线 QB 与曲线 OA_1C 之间的竖直线段的长度。

从宇宙场强的特点得到如下的结论：

- ▲ 宇宙的斥力膨胀首先从最外层开始，然后向内部延伸。因此远方天体的哈勃常数比较大。
- ▲ 随着膨胀的增大，球内与球外的宇宙场强的变化趋于一致。例如， $a > 3$ 。这就是目前宇宙边界不甚分明的原因（参见图1）。
- ▲ 宇宙边界外，宇宙场强的变化是产生高红移的原因。

6. 哈勃常数

在我们这个宇宙中，取宇宙的中心作为参照点。那么，所有天体相对于中心的速度就是绝对速度 V' ，天体到中心的距离记为 r' 。宇宙开始斥力膨胀后，所有天体都在有心力场中运动。根据功能原理，有

$$\int_{r'_0}^{r'} \Delta M m r \, dr = \frac{1}{2} m (V'^2 - V_0'^2)$$

相对于 V' 而言，初速度 V_0' 可以忽略，所以

$$\Delta M (1 - \mu^2) r'^2 = V'^2$$

即

$$H r' = V'$$

其中

$$H^2 = (1 - \mu^2) \Lambda M \quad (14)$$

上面推导中假定了 Λ 是恒量, 使运算变得很简单。可以证明, 由此产生的偏差很小, 所以不影响问题的结论。

当 $\mu \rightarrow 0$ 时, 有

$$H_{\max} = \sqrt{\Lambda_0 M} \quad (15)$$

由于 $\Lambda \rightarrow \Lambda_0$ 只具有理论上的意义, 所以 $H_{\max}$ 是观测不到的。

设天体相对于地球的速度为 V , 到地球的距离为 r 。可以证明图 4 中的天体 A 、 B 、 C 、 D 、 E 、 F 对于地球 P 都存在哈勃关系, 以天体 B 为例, 由上面的推导得知

$$\vec{V}'_b = H \vec{r}'_b \quad \text{和} \quad \vec{V}'_p = H \vec{r}'_p$$

于是

$$\vec{V}'_b - \vec{V}'_p = H(\vec{r}'_b - \vec{r}'_p)$$

由图中看出, 上式恰好是哈勃定律

$$V = Hr \quad (16)$$

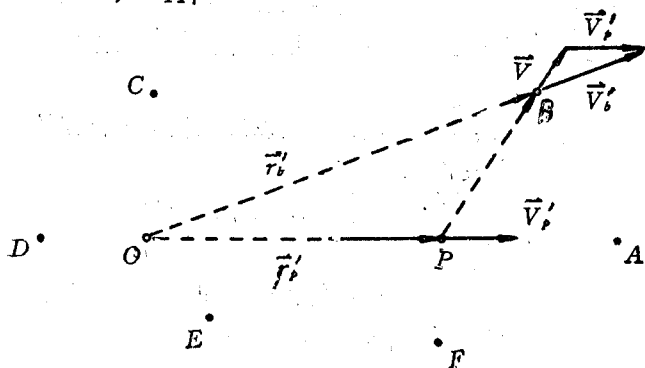


图 4 哈勃定律

无论观测者在哪一个星系上, 都会观测到哈勃定律。这是一个观测效应, 因为真正的中心并不是观测者。

如果信号的传播是瞬时的, 我们将看到某一时刻宇宙中

各个地方的哈勃常数。事实上，一切观测都是建立在光的传播上，即所看到的一切都是经光速变换后的图像。这意味着，显示在不同距离上的哈勃常数，是不同膨胀年龄的哈勃常数（附录2）。这就是说，哈勃常数和距离的关系不是简单的比例关系。

7. 平均质量密度

众所周知，星系的光学质量不能完全反映暗物质对星系质量的贡献。不过，暗物质的质量仍然要遵循经典力学。所以从道理上讲，维里质量*应当代表星系的质量。

另一方面，引力物质的特点是聚集。一般情况下，引力起控制作用的空间里，质量密度最大的地方一定是引力空间的中心区域，即天体及其周围。

根据上述看法，星系际不会存在着很多质量。同理，超星系团际也不会有很多看不见的质量，尽管它的整体已受斥力支配。

应当认为，宇宙的平均质量密度以维里质量为依据还是比较合理的。

由质光比和星系计数推算出的宇宙平均质量密度为

$$2.0 \times 10^{-31} \text{克/厘米}^3$$

这是公认的数值。从后发星团推算出的维里质量是光学质量的8.3倍[6]。可以认为宇宙的平均质量密度是**

$$(1.0 - 2.0) \times 10^{-30} \text{克/厘米}^3$$

* 容建湘著，《恒星天文学》，p448，高等教育出版社，1986年。

许多力学书对维里定理都有描述——作者注。

** 中国大百科全书，《天文学》，p64，“短缺质量”条文，中国大百科全书出版社，1980年。

我取

$$\rho = 1.75 \times 10^{-30} \text{克/厘米}^3$$

宇宙平均质量密度的计算公式是

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi a^3} \quad (17)$$

8. 膨胀年龄

根据斥力定律得到最外层的运动方程

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = \Lambda M a \quad (18)$$

或者

$$\frac{d^2 a}{dt^2} = \left(\Lambda_0 - \frac{G}{a^3} \right) M a \quad (19)$$

现在, 设 $\Lambda = \text{常数}$, 解微分方程 (18) 得到 (附录 3)

$$t_e = \frac{1}{\sqrt{\Lambda M}} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \mu^2}}{\mu} \quad (20)$$

由于假定了宇宙常数为恒量, 所以上式求出的 t_e 是最小值. 代入表 1 中的宇宙参数值, 求得 $t_e > 186$ 亿年. 这个结果是正确的, 因为已知球状星团是最古老的天体, 它的年龄是 1.7×10^{10} 年*.

解方程 (19), 或者把等式 (31) 写成

$$\left(\frac{da}{dt} \right)^2 = \frac{GM}{a_0} \frac{1 - 3\mu^2 + 2\mu^3}{\mu^2} \quad (21)$$

* 方励之等.《宇宙的创生》, p49, 科学出版社, 1987年.

利用 $a = \frac{a_0}{\mu}$, 有 $da = -\frac{a_0}{\mu^2} d\mu$, 代入 (21) 中得

$$-\frac{d\mu}{dt} = \sqrt{\frac{GM}{a_0^3}} \mu \sqrt{1 - 3\mu^2 + 2\mu^3}$$

于是

$$t_* = \left(\frac{GM}{a_0^3}\right)^{-\frac{1}{2}} \int_{\mu}^{0.4} \frac{-d\mu}{\mu \sqrt{1 - 3\mu^2 + 2\mu^3}} \quad (22)$$

以 $\mu = 0.4$ 作为膨胀时间的起点, 即 $t = 0$. 把表 1 中的参数值代入公式 (22) 中, 利用近似积分法计算的结果如图 5 所示. 斥力膨胀的开始阶段, 最外层的运动速度不会等于零. 假定初速度的平均值约为每秒几千公里是不算大的, 这就相当于从 $\mu = 0.98$ 开始膨胀, 从图上查出的膨胀年龄是 310 亿年. 这是宇宙视膨胀年龄的上限.

真实宇宙年龄是星系前年龄与星系后的真实膨胀年龄之和. 这里所得到的仅仅是视膨胀年龄的取值范围.

9. 红移*

规定: 发射光子的地方为“1”, 接受光子的地方为“2”. 定义红移

$$Z = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_2} \quad (23)$$

当 $Z > 0$ 时为红移, $Z < 0$ 为蓝移.

1. 速度红移

速度红移是天体之间的相对速度 V 引起的多普勒效应. 已知速度红移为

* 李竞.《天文学的新进展》(论文集), 科学出版社, 1983年.

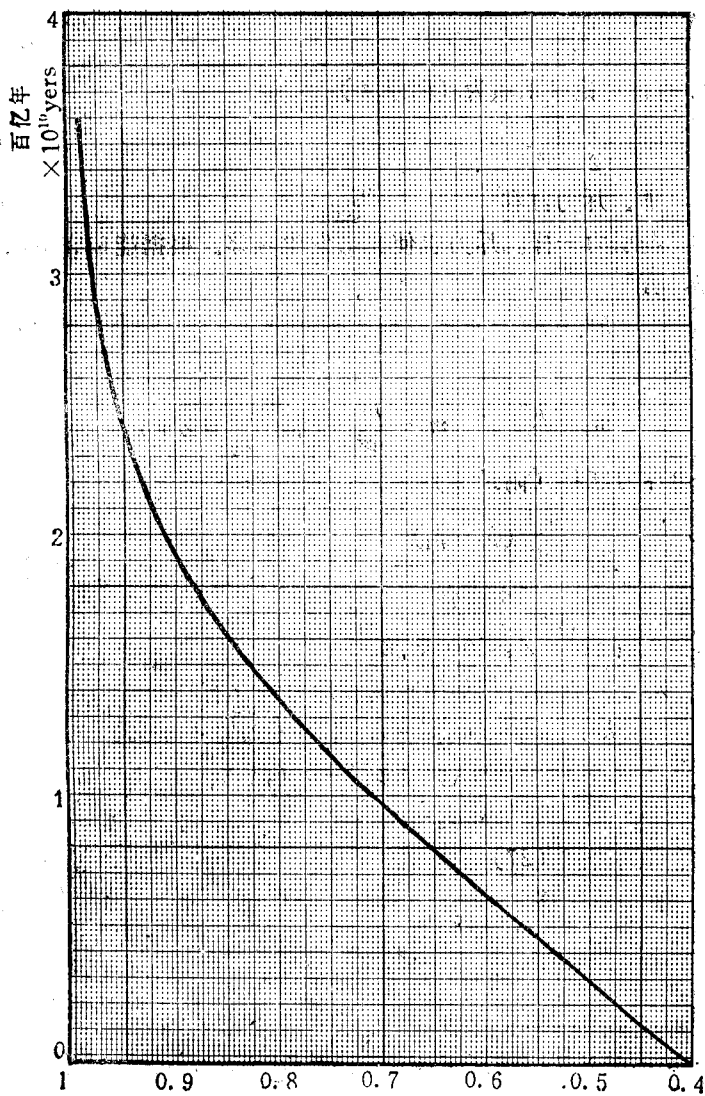


图5 宇宙膨胀年龄

$$Z_v = \frac{V}{c} \quad (24)$$

Z_v 的相对论修正项为 (附录 4)

$$\frac{1}{2} \frac{V^2}{c^2} \quad (25)$$

Ⅰ. 斥力红移

与引力一样, 斥力也使光谱发生频移。根据能量守恒原理, 有*

$$h\nu_1 - h\nu_2 = m_2\phi_2 - m_1\phi_1 \quad (26)$$

代入

$$m_1 = \frac{h\nu_1}{c^2}, \quad m_2 = \frac{h\nu_2}{c^2} \quad \text{和} \quad \frac{\nu_1}{\nu_2} = Z + 1$$

求出斥力红移 (附录 5)

$$Z_s = \frac{\frac{1}{c^2}(\phi_2 - \phi_1)}{1 + \frac{1}{c^2}\phi_1} \quad (27)$$

$Z_s > 0$ 为红移, $Z_s < 0$ 为蓝移。

对于复合场, 例如引力场和斥力场, 有

$$\begin{aligned} h\nu_1 - h\nu_2 &= (m_2\phi'_2 - m_1\phi'_1) + (m_2\phi''_2 - m_1\phi''_1) \\ &= m_2(\phi'_2 + \phi''_2) - m_1(\phi'_1 + \phi''_1) \\ &= m_2\phi_2 - m_1\phi_1 \end{aligned}$$

仍然得到公式 (27) 的形式。

Ⅱ. 总红移

$$Z = Z_v + \frac{1}{2} Z_v^2 + Z_s \quad (28)$$

* 方励之、R·鲁菲尼。《相对论天体物理的基本概念》, p36, 上海科学技术出版社, 1981年。

由于类星体的退离速度并不接近光速，所以只取一项速度修正。

IV. 最大红移

令 $Z_v = 1$ 时的总红移

$$Z_{max} = 1.5 + Z_s \quad (29)$$

作为最大红移的参考值。最大红移的数值由观测决定。当我们再也找不到比某一个数值更大的红移时，那么这个数值就是最大红移值。宇宙参数的数值的最终选定，在很大程度上取决于最大红移值。

(二) 计算方法

宇宙参数的数值只能从最外层的计算中求出。这些数值作为以后所有计算的依据。

1. 最外层的计算

I. 速度红移

根据动能定理，有

$$\frac{1}{2} A_0 M (a^2 - a_0^2) - \left(\frac{GM}{a_0} - \frac{GM}{a} \right) = \frac{1}{2} V^2 \quad (30)$$

导出

$$\frac{GM}{a} \frac{1 - 3\mu^2 + 2\mu^3}{\mu^3} = V^2 \quad (31)$$

或

$$\frac{GM}{a^3} \frac{1 - 3\mu^2 + 2\mu^3}{\mu^3} a^2 = V^2$$

对照公式 (16)，得到

$$H^2 = \frac{GM}{a^3} \frac{1 - 3\mu^2 + 2\mu^3}{\mu^3} \quad (32)$$

$$a^3 = \frac{GM}{H^2} \frac{1 - 3\mu^2 + 2\mu^3}{\mu^3} \quad (33)$$

把等式 (31) 代入公式 (24) 中, 得到

$$Z_v = \sqrt{\frac{GM}{c^2 a} \frac{1 - 3\mu^2 + 2\mu^3}{\mu^3}} \quad (34)$$

由于我们位于宇宙的核心区域, 绝对运动速度很小, 于是, 由 (31) 式求出的速度就是最外层相对于我们的运动速度, 它所产生的红移正是我们所观测到的红移中的一部分。

II. 斥力红移

光子从最外层射向宇宙中心, 由公式 (3)、(5) 和 (6) 得到

$$\phi_1 = -\frac{1}{2} A_0 M a^2 - \frac{GM}{a}$$

$$\phi_2 = -\frac{3}{2} \frac{GM}{a}$$

代入公式 (27), 得

$$Z_s = \frac{\frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} A_0 M a^2 - \frac{1}{2} \frac{GM}{a} \right)}{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} A_0 M a^2 + \frac{GM}{a} \right)} \quad (35)$$

把公式 (7) 和 (8) 代入上式, 得到

$$Z_s = \frac{\frac{1}{2} \frac{GM}{c^2} \frac{1}{a} \left(\frac{1}{\mu^3} - 1 \right)}{1 - \frac{GM}{c^2} \frac{1}{a} \left(\frac{1}{2\mu^3} + 1 \right)} \quad (36)$$

III. 计算方法

我们的目的是求 Λ_0 ，但是 $\Lambda_0 = \frac{G}{a_0^3}$ 和 $a_0 = \mu a$ 。 μ 和 a 都是未知数，只有 a 所对应的红移值是已知数，即

$$Z_v + \frac{1}{2} Z_v^2 + Z_s = 2.3 \quad (37)$$

我们看出，把公式(33)代入公式(34)和(36)中，就可以消去未知数 a ，然后由等式(37)得到方程

$$f(M, H, \mu) = 2.3$$

在这个三元不定代数方程中， μ 的表示式最复杂，那么就把它取作自变数，计算起来就方便了。给定 M 和 H 的数值之后，只要适当的选取 μ ，总会使等式(37)成立，具体的计算公式见附录6。

从上面的计算方法看出，只有利用最外层来进行计算工作，才是充分利用了已知条件。

2. 球内的计算

速度红移

$$Z_v = \frac{Hr}{c} \quad (38)$$

上式中的 H 是从最外层的计算中求出的。

斥力红移的计算方法是把

$$\begin{aligned} \phi_1 &= -\frac{1}{2} \Lambda_0 M r^2 - \frac{GM}{a} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{a^2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} M r^2 \left(\Lambda_0 - \frac{G}{a^3} \right) - \frac{3}{2} \frac{GM}{a} \\ &= -\frac{1}{2} \Lambda M r^2 - \frac{3}{2} \frac{GM}{a} \\ \phi_2 &= -\frac{3}{2} \frac{GM}{a} \end{aligned}$$

代入公式 (27) 中得

$$Z_e = - \frac{\frac{1}{c^2} \cdot \frac{1}{2} \Delta M r^2}{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} \Delta M r^2 + \frac{3}{2} \frac{GM}{a} \right)} \quad (39)$$

其中 Δ 、 M 、 a 都是从最外层计算中求出的。

总红移是公式 (28)。具体的计算方法见附录 7。

3. 球外的计算

速度红移的计算公式与球内相同

$$Z_v = \frac{H}{c} r$$

斥力红移的计算方法与球内相同，以

$$\phi_1 = - \frac{1}{2} \Delta_0 M r^2 - \frac{GM}{r}$$

$$\phi_2 = - \frac{3}{2} \frac{GM}{a}$$

代入公式 (27) 中求出

$$Z_e = \frac{\frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} \Delta_0 M r^2 + \frac{GM}{r} - \frac{3}{2} \frac{GM}{a} \right)}{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{2} \Delta_0 M r^2 + \frac{GM}{r} \right)} \quad (40)$$

其中 Δ_0 、 M 和 a 都是从最外层的计算中求出的。

总红移仍然是公式 (28)。当 $Z_v = 1$ 时，总红移就是 $Z_{\max}$ ，相应的距离就是我们的视界，即我们观测的极限距离。

详细的计算方法见附录 8。

4. $Z-r$ 关系

当 $Z < 2.3$ 时，斥力红移用球内公式 (39) 计算，速度红

移应用公式 (38) 计算, 总红移是公式 (28)。

当 $Z > 2.3$ 时, 斥力红移用球外公式 (40) 计算, 速度红移应用公式 (38) 计算, 总红移是公式 (28)。

具体的计算方法见附录 9。

5. 红移—星等关系

星等与距离的关系是*

$$m = M + 5 \lg r + 40 \quad (41)$$

其中 M 是绝对星等, 在计算中我使用视平均绝对星等 $\overline{M}_v$, 我认为这样比较符合实际情况。我采用:

$$\text{对于星系} \quad \overline{M}_v = -20^m.0[7]$$

$$\text{对于类星体} \quad \overline{M}_v = -24^m.0[7]$$

把上式代入公式 (41), 得

$$r = 10^{0.2m-4} \quad (42)$$

和

$$r = 10^{0.2m-3.2} \quad (43)$$

计算方法与 $Z-r$ 关系相同, 只是经等式 (42) 和 (43) 的变换后, 自变量成为星等 m (参见附录 9)。

(三) 计算结果

1. 宇宙参数

最外层的计算结果列入表 2 (附录 11), 其中 $\overline{M}_v$ 是 与

* П.П.巴连那果著,《星系学》,陈彪译,商务印书馆,1953年。
中国大百科全书《天文学》,p457,大百科全书出版社,1980年。

最佳拟合线相符的数值(图7)。为了缩小选择的范围,提出几个限制条件。

I. 在星系的中心区域,维里质量是光学质量的7—10倍^[8],所以

$$1.4 < \rho < 2.0$$

II. 普遍认为宇宙半径的最大值为6Gpc,最小值为4Gpc*。这些估计都没有考虑到斥力对 $Z-r$ 关系的影响,显然是偏大的。现在可以肯定

$$a < 4$$

III. 哈勃常数的最大观测值约为95[Vanden Bergh]**。如果把它当作本文中的 $H_{\max}$,那么就有

$$H < 77$$

虽然 $H_{\max}$ 是观测不到的,但是这种借鉴具有明显的参考价值。

IV. 如果把红移所对应的距离叫作红移距离,那么,斥力的存在使得过去所确定的红移距离偏大,从而影响了绝对星等的数值。显然有

$$|\overline{M}_r| < 20.30^{[7]}$$

V. 假设 $Z_{\max} > 5$ 。这是根据当前发现高红移天体的趋势的一种判断。从计算出来的结果可以验证这个假设。

根据这些限制条件,我们得到了表3(附录12)。从表2和表3可以看出宇宙参数的合理范围是

$$H = 65-70 \quad M = 0.9-1.2$$

* 《天文学与哲学》(论文集), p271, 中国社会科学出版社, 1984年。

** H.L.西普门.《黑洞、类星体和宇宙》, p341, 科学出版社, 1987年。
中国大百科全书《天文学》, p108, 大百科全书出版社, 1980年。

$$\alpha = 3.5-3.7 \quad \rho = 1.6-2.0$$

根据自己的观点可以任意选取一组。我选定的一组数值是

$$M = 1.0 \quad \rho = 1.75 \quad H = 68$$

$$\alpha = 3.59 \quad \mu = 0.4$$

表 1 的数值是采用下列数值进行计算的。

$$M = 1.0 \quad H = 68 \quad \rho = 1.750144098$$

$$\alpha = 3.594142145 \quad \mu = 0.402014863$$

2. $Z-r$ 图

分别应用球内公式和球外公式得到图 6 中的 $Z-r$ 曲线。只要知道天体的红移值，就能够利用图中的曲线求出它的距离和速度。

计算的结果列入表 4（附录 13）。

当 $r = 3.59414215$ 时，用球内公式算出的 $Z = 2.300000001$ ，用球外公式算出的 $Z = 2.300000008$ 。这表示球内曲线与球外曲线在接点处是完全吻合的。这是理论合理性的印证之一。

3. $Z_{\max}$ 的合理范围

应用球外公式算出 $Z_v = 1$ 时的 $Z_{\max}$ 和 r ，列入表 2。从表 3 可看出， $Z_{\max}$ 的合理范围是

$$Z_{\max} = 5-8 \quad r_s = 4-4.6$$

因此我们可以观测到 $Z > 5$ 的类星体。但是，无论如何观测不到 $Z > 8$ 的类星体，即观测不到 $r > 4.6 \text{ Gpc}$ 的天体。

如果永远观测不到 $Z \approx 5.78$ 的天体，或者发现 $Z > 5.78$ 的天体，那么我取的这一组宇宙参数就是不合理的，只须另换

一组。

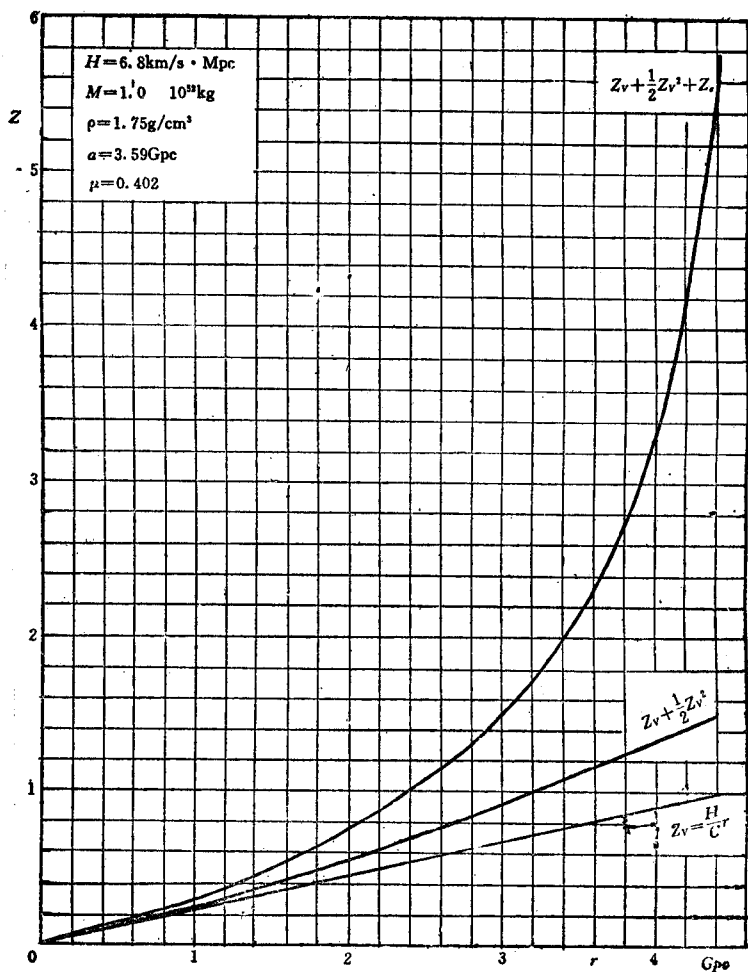


图6 $Z-r$ 关系

4. $Z-m$ 图

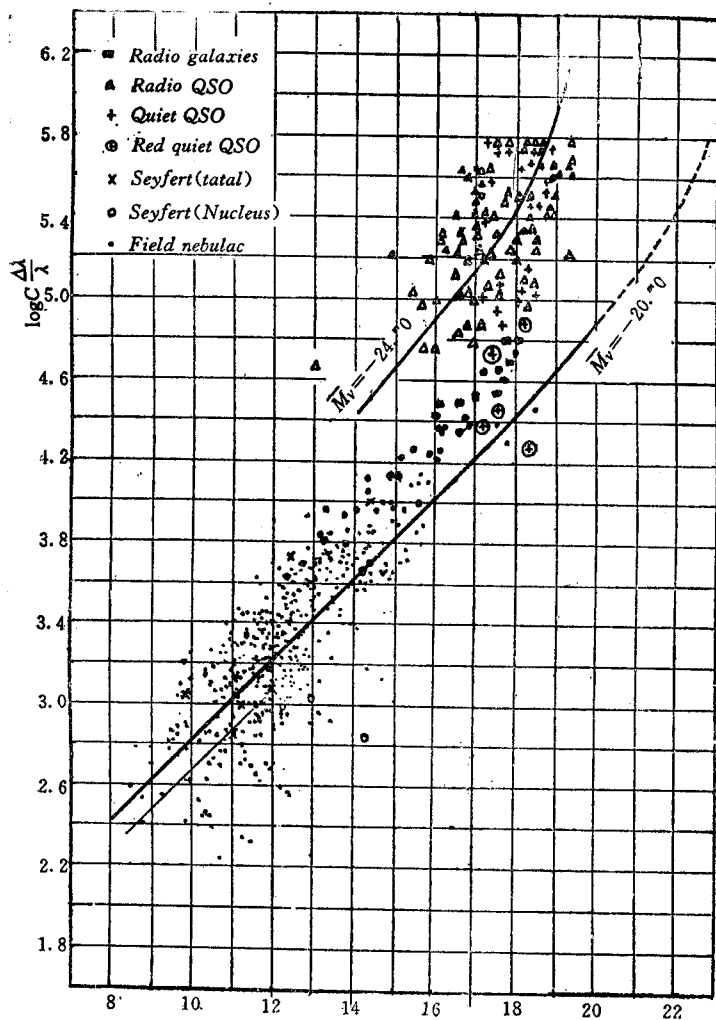


图7 $Z-m$ 关系

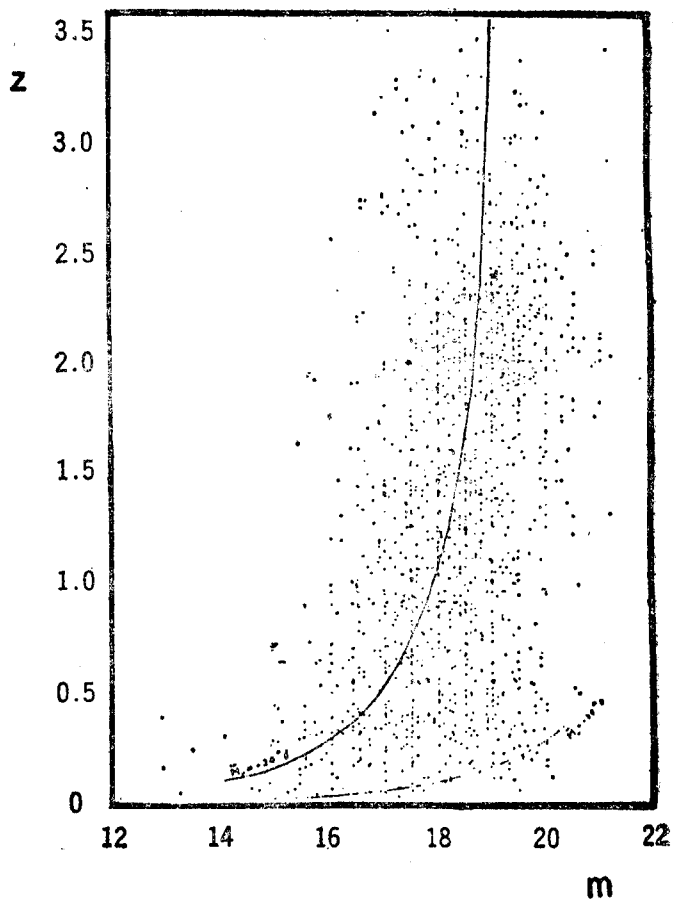


图8 类星体 Z — m 关系

根据 $H = 68$, $M = 1$ 和 $\rho = 1.75$, 分别用球内公式和球外公式计算 $Z-m$ 关系, 得到图7中的两条曲线[9]。它们与观测符合地很好。根据类星体总表 [10] 描绘出类星体的哈勃图是图8。图中的曲线对应 $\overline{M}_v = -24^m.0$, 看来这个数值差不多, 这也说明使用 $\overline{M}_v$ 是正确的。

从图中看出, 类星体的视星等是有下限的, 约为 $21^m.0$ 。类星体视星等的弥散主要是演化效应。

图7中下方的短线对应 $H = 50$, 它代表宇宙中心区域的哈勃常数。宇宙中心区域的哈勃常数只能由观测决定。从图中看出, 外层的哈勃常数是 $70-75$, 内部的哈勃常数甚至比 50 还要小。

很明显, 与最佳拟合线相符的哈勃常数是一个平均值。不过, 用它来进行全部计算, 对于粗略的检验一下这个理论是否正确, 已经是足够精确。

$Z-m$ 图的数据列入表5 (附录14)。

当 $m = 18.77797624$ 时, 球内 $Z = 2.300000003$, 球外 $Z = 2.300000011$ 。两条曲线衔接的极好。两个全然不同的公式, 在接点处竟有完全相同的结果, 这绝不是偶然的巧合。

(四) 类星体视星等下限的意义

对于遥远天体, 距离和退离速度都使它的亮度减弱。如果退离速度接近光速, 那么距离的远近可能成为次要的, 而退离速度和退离加速度足以使它的亮度趋于零。现在的仪器可以观测到28等星。由此可见, 类星体视星等的下限标志着它的退离速度不接近光速。

(五) 相对论修正

由于最外层的运动速度并不十分接近光速，所以非相对论性描述用于验证斥力定律是允许的。

这里指出一点，远处天体的运动速度并不减速。因为从

$$\frac{d}{dt} \frac{m_0 V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \Delta M r \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

导出 (附录10)

$$\frac{dV}{dt} = \Delta M r \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \quad (44)$$

加速度越来越小，但总是正值。

三、总 结

从上面的内容可总结出以下主要的东西。

I. 提出斥力定律

文章明确指出，质量是斥力的直接载体，斥力与质量的乘积成正比。这一点比历史上的猜测前进了一步。正是这微弱的一步，使它平步青云。

II. 求出斥力常数

求出斥力常数的参考值，这是使斥力定律步入物理学的至关重要的一步。

III. 建立了后星系宇宙模型

使星系后的宇宙学初步成为一个自圆其说的定量的理论。

IV. 解决了红移争论

红移的起源，基本上是宇宙学的，即红移是距离的函数。

V. 证明了哈勃定律是观测效应

这就是说，起码从哈勃定律得不出宇宙中各处都是平等的说法。

VI. 哈勃常数不是恒量

由于哈勃常数是距离的函数，所以宇宙的膨胀不是均匀的膨胀，不是没有中心的膨胀。

VII. 给出类星体的哈勃图

从本文的结果看，企图用一条曲线去同时拟合星系和类

星体的想法是一种谬误。从图中看出类星体视星等的弥散主要是演化效应，因为曲线两边的密度分布是对称的。

Ⅷ. 类星体的红移值存在着上限

这一点对观测和理论都具有重要意义。

Ⅸ. 远处天体不减速

X. 计算出一组宇宙参数

这些问题都是互相联系的，不可能单独解决哪一条，所以人们把这类问题的解决称作突破。

文章使人相信斥力是主宰宇观现象的动力学原因，犹如其它的力各领其域各尽其职一样。

四、问 题

从斥力定律可以推想如下的说法是合理的。

I. 超星系团的稳定结构只能是链状。

II. 离中心近者链长，离中心远者链短。

III. 离中心比较远的地方，短链形成网状结构。

IV. 靠近宇宙边缘的地方，成团形消失，网状结构破裂为单个天体，如类星体。

V. 类星体的命运就是拚命的奔跑，扔掉身上的能量，直到撕裂身驱。然后，一缕幽魂漂向姜子牙的封神台。

VI. 对于广漠的宇宙来讲，力的传播速度实在是太慢了，因此它所造成的力学现象必然被显现出来。例如密度波现象，即红移分布中的峰值。

VII. 关于 $Z_{\max} < 8$ 的结论是至关重要的，这是一个具有判决性质的论断。须要提及的是，并不是设备和方法没有能力发现高红移天体，而是茫茫星海无觅处。1973年发现 $Z = 3.52$ ，1982年发现 $Z = 3.78$ ，1987年发现 $Z = 4.43$ 。实际上，这种发现就好比大海捞针一样。事实足以使人预感到红移值是有上限的，而且不会很大*。

* 本书准备付印时，许梅先生告之：1989年发现 $Z = 4.73$ ，1991年发现 $Z = 4.90$ 。

五、结束语

正因为书中有许多穿凿之处，特别是那些图表和数据只能作为参考，所以作者深信本书必能起到抛砖引玉的作用。

不要以我们个人生活中的经验和知识来定义存在。

六、参考文献

- [1] H.E. 茹科夫斯基《理论力学》, p137, 高等教育出版社, 1957年.
- [2] S.Osmer, Ap.J. 247, 762—773 (1981) .
- [3] 方励之和佐藤文隆. 天文学报, 24 (1983) , 40.
- [4] Ap.J. 248 (1981) , L57—L60.
- [5] S.A. 格雷戈里等《科学(中译本)》, 1982年, 第7期.
- [6] E.H. 阿弗雷特《天体物理学前沿》, p550, 科学出版社, 1982年
- [7] C.W. 艾伦《物理量和天体物理量》, §135 和 §136, 上海人民出版社, 1976年.
- [8] E.H. 阿弗雷特《天体物理学前沿》, p532, 科学出版社, 1982年.
- [9] K.R. 兰《天体物理公式》, 上海科学技术出版社, 1983年, 图35.
- [10] A Hewitt and C. Burbidge, Ap.J. 43 (1980) , 57—158.

七、附 录

(一) 没有蓝移天体的原因

如果地球靠近宇宙的边缘(图9),那么位于A点的天体所发出的光,对于地球上的观测者来说,斥力蓝移将大于速度红移。于是,我们将在一定空间范围里观测到许多蓝移天体。

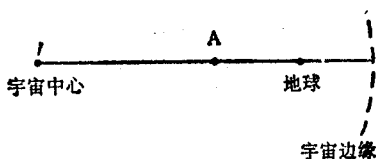


图9

(二) 哈勃常数与距离的关系

在图10中,宇宙的年龄用 t 表示,并且 $t_3 > t_2 > t_1$ 。从图中看出,宇宙年龄为 t_3 时,地球上同时看到 H_B 和 H'_A 。 H_B 对应的年龄是 t_1 , H'_A 对应的年龄是 t_2 。因此,在 t_3 时刻, H_A 早已掠过地球。

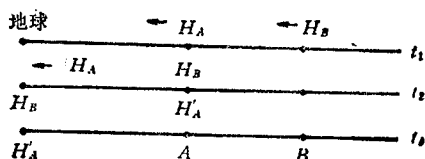


图10

(三) 年龄方程的解法

I. 设 Λ 为恒量, 解方程式(18).

等式两边同乘 $2 \frac{da}{dt}$, 有

$$2 \frac{da}{dt} \cdot \frac{d^2 a}{dt^2} = \Lambda M a \cdot 2 \frac{da}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{da}{dt} \right)^2 = 2 \Lambda M a \frac{da}{dt}$$

$$d \left(\frac{da}{dt} \right)^2 = 2 \Lambda M a da$$

$$\left(\frac{da}{dt} \right)^2 = 2 \Lambda M \int a da$$

$$\left(\frac{da}{dt} \right)^2 = \Lambda M a^2 + C$$

当 $a = a_0$ 时, $\frac{da}{dt} = 0$, 所以

$$\frac{da}{dt} = \sqrt{\Lambda M (a^2 - a_0^2)}$$

分离变量后, 得

$$\int_{a_0}^a \frac{da}{\sqrt{a^2 - a_0^2}} = \int_0^t \sqrt{\Lambda M} dt$$

查积分表, 有

$$\ln(a + \sqrt{a^2 - a_0^2}) \Big|_{a_0}^a = \sqrt{\Lambda M} t$$

$$\ln \frac{a + \sqrt{a^2 - a_0^2}}{a_0} = \sqrt{\Lambda M} t$$

代入 $a_0 = \mu a$ 后得公式(20).

II. 解方程式 (19)

与上述方法类似地得到

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = 2\Lambda_0 M \int a da - 2GM \int \frac{da}{a^2}$$

$$\left(\frac{da}{dt}\right)^2 = \Lambda_0 M a^2 + 2GM \frac{1}{a} + C$$

当 $a = a_0$ 时, $\frac{da}{dt} = 0$, 所以

$$C = -\Lambda_0 M a_0^2 - 2GM \frac{1}{a_0}$$

于是, 得到等式 (20).

(四) 速度红移的相对论修正*

运动坐标系 K' 与静止坐标系 K 的相对速度为 v . 在时刻 t , 由 K' 系中 A 点发出光信号(附图 11), 到达 O 点的时刻为

* 张永立,《相对论导论》,云南人民出版社,1980年.
其它相对论著作中关于多普勒效应一节都有推导.

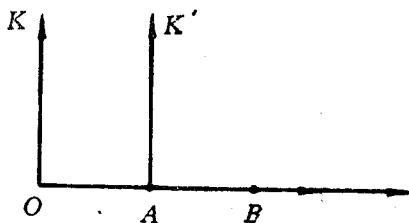


图11

$$t + \frac{OA}{c}$$

在 K' 系中，经过一个周期 T' 又发射一个光信号，这时 A 点已运动到 B 点的位置。信号由 B 点到达 O 点的时刻为

$$t + T' + \frac{OB}{c}$$

在 O 点的时间差为 T ，即 K 系中所观测到的周期，有

$$\begin{aligned} T &= \left(t + T' + \frac{OB}{c} \right) - \left(t + \frac{OA}{c} \right) \\ &= T' + \frac{OB - OA}{c} = T' + \frac{AB}{c} \\ &= T' + \frac{v \cdot T'}{c} = T' \left(1 + \frac{v}{c} \right) \end{aligned}$$

在上面的推导中，把 K' 系中的周期 T' 固定不变的应用在 K 系中，这是不符合相对论的。根据相对论，静止系统中的时间变慢，所以 K 系中的信号周期为

$$\frac{T'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

由于 K' 系的运动，在 K 系中实际观测到的周期为

$$T = \frac{T'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(1 + \frac{v}{c}\right)$$

应用泰勒级数的展开，有

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{T}{T'} &= \frac{\nu'}{\nu} = \left(1 + \frac{v}{c}\right) \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}\right) \\ &= 1 + \frac{v}{c} + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \end{aligned}$$

所以

$$Z = \frac{\nu'}{\nu} - 1 = \frac{v}{c} + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$$

(五) 斥力红移公式的推导

$$h\nu_1 - h\nu_2 = \frac{h\nu_2}{c^2} \phi_2 - \frac{h\nu_1}{c^2} \phi_1$$

$$\nu_1 - \nu_2 = \frac{\nu_2}{c^2} \left(\phi_2 - \frac{\nu_1}{\nu_2} \phi_1 \right)$$

$$\frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_2} = \frac{1}{c^2} \left(\phi_2 - \frac{\nu_1}{\nu_2} \phi_1 \right)$$

$$Z = \frac{1}{c^2} \left(\phi_2 - \frac{\nu_1}{\nu_2} \phi_1 \right)$$

$$= \frac{\phi_2}{c^2} - \frac{1}{c^2}(Z+1)\phi_1$$

所以

$$Z = \frac{\frac{1}{c^2}(\phi_2 - \phi_1)}{1 + \frac{1}{c^2}\phi_1}$$

(六) 球面的计算过程

计算工作必须使用有程序的电算器。我使用的是 EC—512 型程序袖珍电算器，有 128 步存贮容量，还有 9 个数据存贮器。

在计算公式中代入表 1 中的单位，例如

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{G \frac{M}{H^2}} &= \sqrt[3]{6.672 \times 10^{-11} \frac{10^{52} M}{\left(\frac{H}{3.085678 \times 10^{-19}}\right)^2}} \\ &= 27.85918952 \sqrt[3]{\frac{M}{H^2}}\end{aligned}$$

类似的换算使公式 (33)、(34) 和 (36) 成为

$$\begin{aligned}a &= 27.85918952 \sqrt[3]{\frac{M}{H^2} \frac{1 - 3\mu^2 + 2\mu^3}{\mu^3}} \\ Z_v &= 0.240582497 \sqrt{\frac{M}{a} \frac{1 - 3\mu^2 + 2\mu^3}{\mu^3}} \\ Z_s &= \frac{\frac{1}{2} \times 0.240582497 \frac{M}{a} \left(\frac{1}{\mu^3} - 1\right)}{1 - 0.240582497 \frac{M}{a} \left(\frac{1}{2\mu^3} + 1\right)}\end{aligned}$$

把 a 的表示式代入 Z_v 和 Z_e 的计算式中,

为了减少程序步数, 必须充分利用多路存贮器(数据存贮器), 特作如下设置:

$$STO_1 = 27.85918952$$

$$STO_2 = 0.240582497$$

$$STO_3 = \frac{1 - 3\mu^2 + 2\mu^3}{\mu^3}$$

$$STO_4 = 27.85918952 \sqrt[3]{\frac{M}{H^2} \frac{1 - 3\mu^2 + 2\mu^3}{\mu^3}}$$

$$STO_5 = \sqrt{0.240582497 \frac{M}{a} \frac{1 - 3\mu^2 + 2\mu^3}{\mu^3}}$$

$$STO_6 = \frac{\frac{1}{2} \times 0.240582497 \frac{M}{a} \left(\frac{1}{\mu^3} - 1 \right)}{1 - 0.240582497 \frac{M}{a} \left(\frac{1}{2\mu^3} + 1 \right)}$$

$$STO_7 = H$$

$$STO_8 = 0.240582497 \frac{M}{a}$$

$$STO_9 = M$$

在存贮公式之前, 先把常数 STO_1 、 STO_2 、 STO_7 和 STO_9 键入存贮器. 设 μ 为自变量, 按如下的计算顺序把公式输入存贮器.

$$\begin{aligned} 1 - 3\mu^2 + 2\mu^3 &= \div \mu^3 = STO_3 \times K_9 \div K_7 = \sqrt[3]{} \times K_1 = \\ STO_4 \times \frac{1}{X} \times K_9 \times K_2 &= STO_8 \times K_3 = \sqrt{} STO_5 + K_2 \div \\ 2 + (((1 \div \mu^3 - 1) \times K_8 \div 2) &+ (1 - (0.5 \div \mu^3 + 1) \times \\ K_8)) STO_6 & \\ = 2ndF LRN \end{aligned}$$

约 104 步。为了减少步数，在存贮公式的过程中 μ 只须输入两位数。当利用已经存贮好的公式计算时， μ 的输入数是 10 位数。

设 $H = H_1$, $M = M_1$ ，当给 μ 一个数值时，计算器将显示一个 Z 值，直到输入的 μ 使 $Z = 2.3$ 为止。这时求出一组数据 H_1 、 M_1 和 μ_1 ，然后再设 $M = M_2$ ，又算出一组数 H_1 、 M_2 和 μ_2 。把所选定的 M 计算完了之后，再设 $H = H_2$ ，并且对所选的 M 进行计算。

用公式 (8) 算出 a_0 ，再由公式 (7) 算出 A_0 。把 a_0 和 A_0 代入公式 (10)，得到 A 。

计算 $H_{\max}$ 和 ρ ，使用公式 (15) 和 (17)。计算 $Z_{\max}$ 和 r ，使用球外公式 (附录 8)。

a ， A_0 和 A 的计算结果列入附录 15。

(七) 球内的计算公式

$$Z = \frac{H}{c} r + \frac{1}{2} \left(\frac{H}{c} r \right)^2 + \frac{\frac{1}{c^2} \cdot \frac{1}{2} A M r^2}{1 - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{1}{2} A M r^2 - \frac{3}{2} \frac{GM}{c^2 a}}$$

换成表 1 中的单位后，得到

$$Z = 0.003335641 H r + \frac{1}{2} (0.003335641 H r)^2 + \frac{0.005296998 A M r^2}{1 - 0.005296998 A M r^2 - 0.360873745 \frac{M}{a}}$$

设

$$STO_1 = 0.003335641H$$

$$STO_2 = 0.005296998AM$$

$$STO_3 = 0.360873745 \frac{M}{a}$$

$$STO_4 = 0.003335641Hr$$

$$STO_5 = 0.003335641Hr + \frac{1}{2}(0.003335641Hr)^2$$

$$STO_6 = \frac{0.005296998AMr^2}{1 - 0.005296998AMr^2 - 0.360873745 \frac{M}{a}}$$

$$STO_7 = Z$$

$$STO_9 = 0.005296998AMr^2$$

存贮公式之前先键入 STO_1 、 STO_2 和 STO_3 (附录16)。

设 r 为自变量, 按下列计算顺序编程

$$r \times K_1 = STO_4 + K_4 \div 2 = STO_5 + ((r^2 \times K_2) STO_6 \div (1 - K_9 - K_3)) STO_8 = STO_7 \quad 2ndF \quad LRN$$

给定一个 r 值, 电算器将显示一个 Z 值, 直到 $Z = 2.3$ 为止。

(八) 球外的计算公式

$$Z = \frac{H}{c}r + \frac{1}{2}\left(\frac{H}{c}r\right)^2 + \frac{\frac{1}{c^2} \cdot \frac{1}{2}A_0Mr^2 + \frac{GM}{c^2r} - \frac{3}{2} \frac{GM}{c^2a}}{1 - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{1}{2}A_0Mr^2 - \frac{GM}{c^2r}}$$

换成表 1 中的单位后, 为

$$Z = 0.003335641Hr + \frac{1}{2}(0.003335641Hr)^2$$

$$+ \frac{0.005296998A_0Mr^2 + 0.240582497M \cdot \frac{1}{r} - 0.360873745\frac{M}{a}}{1 - \left(0.005296998A_0Mr^2 + 0.240582497M \frac{1}{r}\right)}$$

设

$$STO_1 = 0.003335641H$$

$$STO_2 = 0.005296998A_0M$$

$$STO_3 = 0.360873745\frac{M}{a}$$

$$STO_4 = 0.003335641Hr$$

$$STO_5 = 0.003335641Hr + \frac{1}{2}(0.003335641Hr)^2$$

$$STO_6 =$$

$$\frac{0.005296998A_0Mr^2 + 0.240582497M\frac{1}{r} - 0.36087345\frac{M}{a}}{1 - \left(0.005296998A_0Mr^2 + 0.240582497M\frac{1}{r}\right)}$$

$$STO_8 = 0.005296998A_0Mr^2 + 0.240582497M\frac{1}{r}$$

$$STO_9 = 0.240582497M$$

先把 STO_1 、 STO_2 、 STO_3 和 STO_9 的数值(附录十六)存入多路存贮器中, 然后设 r 为自变量, 按下列计算顺序存贮公式。

$$r \times K_1 = STO_4 \text{ look} + K_4 \div 2 = STO_5 + (((r^2 \times K_2 + K_9 \div r) STO_8 - K_3) \div (1 - K_8)) STO_6 = STO_7 \quad 2ndF \quad LRN$$

其中 $look$ 用来显示 Z_v 的数值, 当 $Z_v = 1$ 时, 计算结果就是 Z_{max} .

(九) $Z-r$ 的计算方法

首先选定一组宇宙参数, 即 H , M 和 ρ 的数值. 然后利用附录十二和附录十六的常数, 把球内计算公式存贮到电算器中. 输入的 r 值由小到大直到 $Z = 2.3$ 为止, 然后清除球内公式, 同时把球外公式存入电算器. 仍然用刚才的 r 输入电算器中, 显示仍然为 $Z = 2.3$. 这意味着, 球内公式与球外公式在衔接点处吻合的极好. 这可能是 $Z = 2.3$ 选择的比较合适, 同时也是理论正确性的印证.

在球外公式的程序中, 设置了 Z_v 的中间显示. 逐渐增大 r , 直到 $Z_v = 1$ 为止. 这时的结果就是 r_i 和 Z_{max} .

(十) 公式(44)的推导*

$$\frac{d}{dt} \frac{m_0 V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = m_0 \frac{d}{dt} \frac{V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

应用求导公式

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

得到

* Ю. Б. 鲁迈尔, М. С. 雷夫金. «相对论导引», p73, 李方锦译, 上海科学技术出版社, 1963.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \frac{V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ &= \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \frac{dV}{dt} - V \frac{d}{dt} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \end{aligned}$$

再根据复合函数求导法则求出

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = \frac{d}{dt} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dt} \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) \\ &= \frac{-V}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right)^{\frac{1}{2}} c^2} \cdot \frac{dV}{dt} \end{aligned}$$

化简后得

$$\frac{d}{dt} \frac{V}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}}} \frac{dV}{dt}$$

(十一) 最外层的计算结果

表2 最外层的计算结果

单位: H =公里/秒·Mpc, $M=10^{52}$ 千克, $\rho=10^{-30}$ 克/厘米³,
 a =Gpc, r_s =Gpc.

H	M	ρ	a	$Z_{\max}$	$H_{\max}$	μ	r_s	$\bar{M}_V$
55	1.2	1.10	4.46	5.53	68	.397607796	5.45	-20.46
	1.3	1.23	4.41	6.30	69	.409588279		
	1.4	1.38	4.36	7.40	70	.421173784		
	1.5	1.53	4.30	9.11	71	.432433053		
	1.6	1.70	4.25	12.19	72	.443425409		
	1.7	1.83	4.19	19.28	73	.454203360		
56	1.1	1.03	4.43	5.07	69	.387684686	5.35	-20.42
	1.2	1.17	4.37	5.68	70	.400259308		
	1.3	1.31	4.32	6.52	71	.412359578		
	1.4	1.47	4.27	7.76	72	.424068238		
	1.5	1.63	4.21	9.77	73	.435455124		
	1.6	1.81	4.16	13.59	74	.446580734		
	1.7	2.00	4.10	23.83	75	.457498880		
57	1.1	1.10	4.34	5.17	70	.390196610	5.26	-20.38
	1.2	1.24	4.28	5.83	71	.402889103		
	1.3	1.40	4.23	6.76	72	.415109820		
	1.4	1.56	4.18	8.17	73	.426942626		

续表2

H	M	ρ	a	$Z_{\max}$	$H_{\max}$	μ	r_s	$\overline{M_V}$
57	1.5	1.74	4.12	10.53	74	.438458486		
	1.6	1.93	4.07	15.42	75	.449719152		
58	1.1	1.16	4.25	5.28	72	.392687249	5.17	-20.35
	1.2	1.32	4.20	6.00	73	.405498051		
	1.3	1.48	4.15	7.03	74	.417839949		
	1.4	1.66	4.09	8.63	75	.429797937		
	1.5	1.85	4.04	11.46	76	.441444210		
	1.6	2.06	3.98	17.90	77	.452841839		
59	1.0	1.08	4.22	4.93	72	.381657959	5.08	-20.31
	1.1	1.23	4.17	5.40	73	.395157391		
	1.2	1.40	4.12	6.18	74	.408086987		
	1.3	1.57	4.06	7.32	75	.420550835		
	1.4	1.76	4.01	9.15	76	.432635128		
	1.5	1.97	3.96	12.59	77	.444413336		
60	1.0	1.14	4.14	4.92	73	.383991279	5.00	-20.27
	1.1	1.31	4.09	5.53	74	.397607796		
	1.2	1.48	4.04	6.38	75	.410656715		
	1.3	1.67	3.98	7.65	77	.423243343		
	1.4	1.87	3.93	9.77	78	.435455124		
	1.5	2.09	3.88	14.00	79	.447366877		
61	1.0	1.21	4.07	5.01	75	.386305281	4.91	-20.24
	1.1	1.38	4.01	5.66	76	.400039190		

续表2

H	M	ρ	a	$Z_{\max}$	$H_{\max}$	μ	r_s	$\overline{M}_V$
61	1.2	1.57	3.96	6.59	77	.413208007		
	1.3	1.77	3.91	8.01	78	.425918299		
	1.4	1.98	3.85	10.48	79	.438258822		
	1.5	2.22	3.80	15.83	81	.450305819		
62	1.0	1.28	3.99	5.10	76	.388600627	4.84	-20.20
	1.1	1.46	3.94	5.81	77	.402452275		
	1.2	1.66	3.89	6.82	78	.415741608		
	1.3	1.88	3.83	8.42	80	.428576506		
	1.4	2.11	3.78	11.32	81	.441047095		
63	1.0	1.35	3.92	5.20	78	.390877952	4.76	-20.17
	1.1	1.54	3.87	5.96	79	.404847722		
	1.2	1.76	3.82	7.07	80	.418258239		
	1.3	1.99	3.76	8.88	81	.431218739		
	1.4	2.23	3.71	12.34	82	.443820790		
64	0.9	1.23	3.91	4.72	78	.378357540	4.68	-20.13
	1.0	1.42	3.85	5.31	79	.393137867		
	1.1	1.63	3.80	6.12	80	.407226182		
	1.2	1.86	3.75	7.35	81	.420758593		
	1.3	2.10	3.69	9.41	83	.433845750		
	1.4	2.36	3.64	13.59	84	.446580734		
65	0.9	1.29	3.84	4.79	79	.380483840		
	1.0	1.50	3.78	5.42	80	.395380960		

续表2

H	M	ρ	α	$Z_{\max}$	$H_{\max}$	μ	r_s	$\overline{M}_V$
65	1.1	1.72	3.73	6.30	82	.409588280	4.61	-20.10
	1.2	1.96	3.68	7.65	83	.423243343		
	1.3	2.22	3.62	10.01	84	.436458270		
	1.4	2.50	3.57	15.16	86	.449327734		
66	0.9	1.36	3.77	4.87	81	.382593648	4.54	-20.07
	1.0	1.58	3.72	5.53	82	.397607796		
	1.1	1.81	3.67	6.48	83	.411934618		
	1.2	2.07	3.61	7.98	85	.425719138		
	1.3	2.34	3.56	10.71	86	.439057008		
	1.4	2.65	3.50	17.20	87	.452062579		
67	0.9	1.43	3.71	4.95	82	.384687477	4.47	-20.03
	1.0	1.66	3.66	5.65	83	.399818922		
	1.1	1.91	3.60	6.69	85	.414265782		
	1.2	2.18	3.55	8.36	86	.428168610		
	1.3	2.48	3.49	11.53	87	.441642657		
68	0.9	1.51	3.65	5.03	83	.386765822	4.41	-20.00
	1.0	1.75	3.59	5.78	85	.402014863		
	1.1	2.01	3.54	6.90	86	.416582336		
	1.2	2.30	3.49	8.77	88	.430610371		
	1.3	2.61	3.43	12.51	89	.444215891		
69	0.9	1.58	3.59	5.11	85	.388829160		
	1.0	1.84	3.53	5.92	86	.404196130		

续表2

H	M	ρ	α	$Z_{\max}$	$H_{\max}$	μ	r_s	$\overline{M}_V$
69	1.1	2.12	3.48	7.14	88	.418884827	4.34	-19.97
	1.2	2.42	3.43	9.23	89	.433039016		
	1.3	2.75	3.37	13.69	91	.446777368		
70	0.8	1.41	3.58	4.60	85	.374535053	4.28	-19.94
	0.9	1.66	3.53	5.20	86	.390877952		
	1.0	1.93	3.48	6.06	88	.406363213		
	1.1	2.23	3.42	7.40	89	.421173784		
	1.2	2.55	3.37	9.77	91	.435455124		
71	0.8	1.48	3.53	4.66	86	.376453218	4.22	-19.91
	0.9	1.75	3.47	5.30	88	.392912642		
	1.0	2.03	3.42	6.22	89	.408516588		
	1.1	2.34	3.37	7.68	91	.423449721		
	1.2	2.68	3.31	10.37	92	.437859259		
72	0.8	1.55	3.47	4.72	87	.378357540	4.16	-19.88
	0.9	1.83	3.42	5.39	89	.394933660		
	1.0	2.13	3.36	6.38	91	.410656715		
	1.1	2.46	3.31	7.98	92	.425713138		
73	0.8	1.63	3.42	4.78	89	.380248409	4.11	-19.85
	0.9	1.92	3.36	5.50	90	.396941419		
	1.0	2.24	3.31	6.56	92	.412784040		
	1.1	2.58	3.26	8.32	94	.427964520		

续表2

H	M	ρ	a	$Z_{\max}$	$H_{\max}$	μ	r_s	$\overline{M}_V$
74	0.8	1.70	3.37	4.85	90	.382126201	4.05	-19.82
	0.9	2.01	3.31	5.60	92	.398936322		
	1.0	2.35	3.26	6.74	94	.414898995		
	1.1	2.71	3.21	8.70	95	.430204338		
75	0.8	1.78	3.32	4.92	92	.383991279	4.00	-19.79
	0.9	2.11	3.26	5.72	93	.400918758		
	1.0	2.46	3.21	6.95	95	.417002001		
76	0.8	1.87	3.27	4.99	93	.385843994	3.94	-19.76
	0.9	2.21	3.21	5.83	95	.402889103		
	1.0	2.58	3.16	7.16	97	.419093465		
77	0.8	1.95	3.22	5.06	94	.387684686	3.89	-19.73
	0.9	2.31	3.17	5.96	96	.404847722		
78	0.8	2.04	3.17	5.14	96	.389513685	3.84	-19.70
	0.9	2.41	3.12	6.09	98	.406794970		
79	0.8	2.12	3.13	5.22	97	.391331309	3.80	-19.67
	0.9	2.52	3.07	6.23	99	.408731190		
80	0.7	1.85	3.13	4.60	97	.374535053	3.75	-19.65
	0.8	2.22	3.08	5.31	99	.393137867		
	0.9	2.63	3.03	6.38	101	.410656715		

(十二) 宇宙参数的选择范围

表3 宇宙参数的选择范围

H	$M=0.8$		$M=0.9$		$M=1.0$		$M=1.1$		$M=1.2$		$M=1.3$		$M=1.4$	
	ρ	$Z_{\max}$	ρ	$Z_{\max}$	ρ	$Z_{\max}$	ρ	$Z_{\max}$	ρ	$Z_{\max}$	ρ	$Z_{\max}$	ρ	$Z_{\max}$
79	2.13	5.22												
78	2.03	5.14												
77	1.95	5.06	2.31	5.96										
76	1.87	4.99	2.21	5.83										
75	1.78	4.92	2.11	5.72										
74	1.70	4.85	2.01	5.60	2.35	6.74								
73	1.63	4.78	1.92	5.50	2.24	6.56								
72			1.83	5.39	2.13	6.38								

续表3

H	M=0.8		M=0.9		M=1.0		M=1.1		M=1.2		M=1.3		M=1.4	
	ρ	$Z_{\max}$	ρ	$Z_{\max}$	ρ	$Z_{\max}$	ρ	$Z_{\max}$	ρ	$Z_{\max}$	ρ	$Z_{\max}$	ρ	$Z_{\max}$
71			1.75	5.30	2.03	6.22	2.34	7.63						
70			1.66	5.20	1.93	6.06	2.23	7.40						
69			1.58	5.11	1.84	5.92	2.12	7.14						
68			1.51	5.03	1.75	5.78	2.01	6.90	2.30	8.77				
67			1.43	4.95	1.66	5.65	1.91	6.69	2.18	8.36				
66			1.36	4.87	1.58	5.53	1.81	6.48	2.07	7.98	2.34	10.71		
65			1.29	4.79	1.50	5.42	1.72	6.30	1.96	7.65	2.22	10.01		
64					1.42	5.31	1.63	6.12	1.89	7.35	2.10	9.41	2.36	13.59
63					1.35	5.20	1.54	5.96	1.76	7.07	1.99	8.88	2.28	12.34
62					1.28	5.10	1.46	5.81	1.66	6.82	1.88	8.42	2.11	11.32
61							1.38	5.66	1.57	6.59	1.77	8.01	1.98	10.48
60							1.31	5.53	1.48	6.38	1.67	7.65	1.87	9.77
59									1.40	6.18	1.57	7.32	1.76	9.15

(十三) $Z-r$ 曲线的数据

表4.1 $Z-r$ 曲线的数据 (球内部分)

r	Z_V	$Z_V + \frac{1}{2} Z_V^2$	Z_s	Z
0.2	0.045	0.046	0.002	0.048
0.4	0.091	0.095	0.007	0.102
0.6	0.136	0.145	0.015	0.161
0.8	0.181	0.198	0.027	0.225
1.0	0.227	0.253	0.043	0.296
1.2	0.272	0.309	0.063	0.373
1.4	0.318	0.368	0.088	0.456
1.6	0.363	0.429	0.119	0.547
1.8	0.408	0.492	0.155	0.647
2.0	0.454	0.557	0.199	0.755
2.2	0.499	0.624	0.251	0.874
2.4	0.554	0.699	0.314	1.006
2.6	0.590	0.764	0.389	1.153
2.8	0.635	0.837	0.481	1.318
3.0	0.680	0.912	0.595	1.507
3.1	0.703	0.950	0.662	1.612
3.2	0.726	0.989	0.737	1.727
3.3	0.749	1.029	0.823	1.851
3.4	0.771	1.069	0.920	1.988
3.5	0.794	1.109	1.031	2.140
3.6	0.817	1.150	1.161	2.311

表4.2 $Z-r$ 曲线的数据 (球外部分)

r	Z_V	$Z_V + \frac{1}{2} Z_V^2$	Z_e	Z
3.6	0.817	1.150	1.161	2.311
3.7	0.840	1.192	1.312	2.504
3.8	0.862	1.233	1.493	2.726
3.9	0.885	1.276	1.711	2.987
4.0	0.907	1.319	1.981	3.299
4.1	0.930	1.362	2.320	3.682
4.2	0.953	1.406	2.759	4.166
4.3	0.975	1.451	3.352	4.803
4.4	0.998	1.496	4.191	5.687
4.41	1.000	1.500	4.281	5.781

(十四) $Z-m$ 曲线的数据表5.1 $Z-m$ 曲线的数据 (球内星系)

m	$\lg_e Z$	Z
8	2.433	0.0009
10	2.834	0.0023
12	3.256	0.0057
13	3.438	0.0091
14	3.641	0.0146
15	3.845	0.023
16	4.052	0.038
17	4.264	0.061
18	4.481	0.101
18.2	4.526	0.112
18.4	4.570	0.124
18.6	4.616	0.138

续表5.1

m	$\lg cZ$	Z
18.8	4.661	0.153
19.0	4.708	0.170
19.2	4.754	0.189
19.4	4.802	0.211
19.6	4.850	0.236
19.8	4.898	0.264
20.0	4.948	0.296

表5.2 $Z-m$ 曲线的数据 (球内类星体)

m	$\lg cZ$	Z
14	4.481	0.101
14.4	4.570	0.124
14.8	4.661	0.153
15	4.708	0.170
15.2	4.754	0.189
15.4	4.802	0.211
15.6	4.850	0.236
15.8	4.898	0.264
16	4.948	0.296
16.2	4.998	0.332
16.4	5.049	0.374
16.6	5.101	0.421
16.8	5.155	0.476
17	5.209	0.540
17.2	5.266	0.615
17.4	5.324	0.703
17.6	5.384	0.807
17.8	5.447	0.933
18	5.513	1.086
18.2	5.584	1.278

续表5.2

m	$\lg cZ$	Z
18.4	5.661	1.527
18.6	5.748	1.866
18.7	5.797	2.089
18.8	5.851	2.367

表5.3 $Z-m$ 曲线的数据 (球外类星体)

m	$\lg cZ$	Z
18.7	5.797	2.089
18.8	5.851	2.367
19	5.987	3.236
19.10	6.079	4.010
19.15	6.136	4.563
19.20	6.205	5.342
19.22	6.239	5.781

(十五) a , A_0 和 A 的数据表6 a , A_0 和 A 的数据

H	M	a	A_0	A
55	1.2	4.462970073	4.064130346	3.808664820
	1.3	4.409830323	3.853860824	3.589048260
	1.4	4.356429428	3.676445943	3.401775342
	1.5	4.302611877	3.525746350	3.240639461

续表6

H	M	a	Δ_0	Δ
55	1.6	4.243225314	3.397190278	3.100992635
	1.7	4.193115863	3.287324683	2.979294243
56	1.1	4.424949961	4.498245927	4.236138616
	1.2	4.371900989	4.238078059	3.966313216
	1.3	4.318715637	4.020796923	3.738867502
	1.4	4.265226434	3.837697259	3.545027434
	1.5	4.211273416	3.682423162	3.378359929
	1.6	4.156698637	3.550247735	3.234050107
	1.7	4.101341293	3.437608226	3.108433491
57	1.1	4.337084103	4.685546132	4.407183654
	1.2	4.284021107	4.416648698	4.127813963
	1.3	4.230781839	4.192309019	3.892432589
	1.4	4.177195059	4.003514519	3.691948591
	1.5	4.123095998	3.843690816	3.519699116
	1.6	4.068320705	3.707955672	3.370700450
58	1.1	4.252248334	4.877620060	4.582262313
	1.2	4.199163840	4.599911249	4.293209844
	1.3	4.145862462	4.368473195	4.049789712
	1.4	4.092168879	4.173982284	3.842589092
	1.5	4.037913181	4.009644043	3.664712195
	1.6	3.982924950	3.870421113	3.511004741

续表6

H	M	a	Λ_0	Λ
59	1.0	4.223333455	5.422694489	5.121228649
	1.1	4.170287282	5.074531782	4.761415029
	1.2	4.117173925	5.787936103	4.462344317
	1.3	4.063802309	4.549367374	4.210985954
	1.4	4.009992741	4.349187474	3.997000356
	1.5	3.955569785	4.180380609	3.813455804
60	1.0	4.144099576	5.635722438	5.316632082
	1.1	4.091055900	5.276346535	4.944682802
	1.2	4.037906457	4.980795123	4.635861552
	1.3	3.984456560	4.735071362	4.376069305
	1.4	3.930521855	4.529219449	4.155234969
	1.5	3.875920939	4.356001484	3.965988113
61	1.0	4.067466432	5.853833390	5.516365626
	1.1	4.014418734	5.483130671	5.132107154
	1.2	3.961226078	5.178561661	4.813206424
	1.3	3.907689933	4.925666905	4.545038679
	1.4	3.853620916	4.714170145	4.317346763
	1.5	3.798831258	4.536610983	4.122368900
62	1.0	3.993307166	6.077088000	5.720467690
	1.1	3.940249034	5.694951790	5.323730212
	1.2	3.887006162	5.381310657	4.994624577
	1.3	3.833375624	5.121237858	4.718094010

续表6

H	M	a	Δ_0	Δ
62	1.4	3.779163318	4.904134205	4.483390871
63	1.0	3.921503009	6.305551040	5.928980303
	1.1	3.868428175	5.911878672	5.519594656
	1.2	3.815128112	5.589118704	5.180162456
	1.3	3.761395705	5.321870189	4.895136281
	1.4	3.707030508	5.099209070	4.653423768
64	0.9	3.905001112	7.040987297	6.659622378
	1.0	3.851942632	6.539283463	6.141941169
	1.1	3.798844908	6.133981446	5.719743828
	1.2	3.745480798	5.802063882	5.369867128
	1.3	3.691638448	5.527652107	5.076267501
	1.4	3.637111307	5.299495162	4.827503366
65	0.9	3.837570923	7.295017403	6.893194223
	1.0	3.784521571	6.778350412	6.359391665
	1.1	3.731394877	6.361331518	5.924221668
	1.2	3.677959902	6.020226724	5.563787188
	1.3	3.623999753	5.738674163	5.261540841
	1.4	3.569301359	5.505096005	5.005689065
66	0.9	3.772187414	7.554594780	7.131512885
	1.0	3.719141728	7.022817239	6.581372811
	1.1	3.665980080	6.594001655	6.133072772
	1.2	3.612467476	6.243683565	5.761971101

续表6

H	M	a	Δ_0	Δ
66	1.3	3.558331658	5.955029320	5.451010626
	1.4	3.503502611	5.716118376	5.188041818
67	0.9	3.708758246	7.819779459	7.374616879
	1.0	3.655710847	7.272750386	6.807926204
	1.1	3.602508324	6.832066100	6.346342453
	1.2	3.548911355	6.472533333	5.964468926
	1.3	3.494692012	6.176813119	5.644732422
68	0.9	3.647196523	8.090632282	7.622545120
	1.0	3.594142145	7.528217346	7.039093903
	1.1	3.540892884	7.075600524	6.564076703
	1.2	3.487204868	6.706846750	6.1711331505
	1.3	3.432844094	6.404123729	5.842763054
69	0.9	3.587420399	8.367214920	7.875336912
	1.0	3.534353836	7.789286797	7.274918554
	1.1	3.491052060	7.324682134	6.786322275
	1.2	3.427266331	6.946716582	6.332610656
	1.3	3.372756202	6.637062097	6.045160384
70	0.8	3.582435388	9.401382383	8.907448155
	0.9	3.529352708	8.649589905	8.133031967
	1.0	3.476268860	8.056028514	7.515443314
	1.1	3.422908936	7.579389683	7.013126627
	1.2	3.369018733	7.192232738	6.598359236

续表6

H	M	a	Λ_0	Λ
71	0.8	3.525988031	9.710211349	9.192173222
	0.9	3.472920655	8.937820625	8.395670400
	1.0	3.419814489	8.328513501	7.760711941
	1.1	3.366390535	7.839803568	7.244538038
	1.2	3.312389399	7.443487342	6.818631165
72	0.8	3.471112099	10.02515574	9.482157643
	0.9	3.418055487	9.231971387	8.563292768
	1.0	3.364922048	8.606813972	8.010768762
	1.1	3.311423511	8.106005890	7.480605605
73	0.8	3.417742530	10.34627411	9.777439258
	0.9	3.364692259	9.532107363	8.935940025
	1.0	3.311526632	8.891003425	8.265658731
	1.1	3.257957893	8.378080472	7.721379250
74	0.8	3.365817795	10.67362570	10.07805624
	0.9	3.312769504	9.838294736	9.213653621
	1.0	3.259566856	9.181156652	8.525427418
	1.1	3.205917327	8.656112925	7.966909750
75	0.8	3.315279661	11.00727038	10.38404703
	0.9	3.262229057	10.15060064	9.496475455
	1.0	3.208984596	9.477349833	8.790121069
76	0.8	3.266072968	11.34726880	10.69545046
	0.9	3.213015830	10.46909321	9.784447912

续表6

H	M	a	Λ_0	Λ
76	1.0	3.159724809	9.779660503	9.059786574
77	0.8	3.218145426	11.69368228	11.01230566
	0.9	3.165077598	10.79384158	10.07761384
78	0.8	3.171447425	12.04657295	11.33465216
	0.9	3.118364810	11.12491600	10.37601663
79	0.8	3.125931892	12.40600365	11.66252981
	0.9	3.072830446	11.46238773	10.67970017
80	0.7	3.134630964	14.03355038	13.29624914
	0.8	3.081554105	12.77203801	11.99597885
	0.9	3.028429843	11.80632918	10.98870886

(十六) 计算程序中设置的常数数值

表7 计算程序中设置的常数数值

H	M	球内 STO_2	球外 STO_2	STO_3
55	1.2	.024209388	.025833228	.097031485
	1.3	.024714536	.026538061	.106384109
	1.4	.025226876	.027263778	.115971864
	1.5	.025748491	.028013807	.125809772
	1.6	.026281523	.028791856	.135915106
	1.7	.026828237	.029602019	.146307755

续表7

<i>H</i>	<i>M</i>	球内 STO_2	球外 STO_2	STO_3
56	1.1	.024682700	.026209920	.089709742
	1.2	.025211464	.026938909	.099052676
	1.3	.025746206	.027687599	.108628562
	1.4	.026289205	.028459585	.118451681
	1.5	.026842749	.029258682	.128538464
	1.6	.027409211	.030089048	.138907831
	1.7	.027991122	.030955307	.149581642
57	1.1	.025679327	.027301261	.091527190
	1.2	.026238027	.028073975	.101084585
	1.3	.026803670	.028868648	.110886329
	1.4	.027378742	.029689252	.120947965
	1.5	.027965759	.030540034	.131287415
	1.6	.028567350	.031425654	.141925387
58	1.1	.026699458	.028420418	.093353231
	1.2	.027289349	.029238865	.103127315
	1.3	.027887246	.030081732	.113157605
	1.4	.028495861	.030953406	.123460995
	1.5	.029117960	.031858615	.134057022
	1.6	.029756456	.032802581	.144968333
59	1.0	.027127138	.028724002	.085447609
	1.1	.027743326	.029567763	.095187955
	1.2	.028365706	.030434026	.105181006

续表7

H	M	球内 STO_2	球外 STO_2	STO_3
59	1.3	.028997259	.031327387	.115442591
	1.4	.029640944	.032252692	.125991062
	1.5	.030299802	.033215202	.136847698
60	1.0	.028162190	.029852410	.087081340
	1.1	.028811172	.030743677	.097031458
	1.2	.029467379	.031659914	.107245796
	1.3	.030134039	.032606163	.117741494
	1.4	.030814380	.033587773	.128538464
	1.5	.031511747	.034610597	.139659871
61	1.0	.029220178	.031007744	.088721997
	1.1	.029903237	.031948545	.098883835
	1.2	.030594654	.032916997	.109321833
	1.3	.031297923	.033918622	.120054527
	1.4	.032016568	.034959330	.131103514
	1.5	.032754270	.036045629	.142493988
62	1.0	.030301306	.032190323	.090369644
	1.1	.031019767	.033182763	.100688967
	1.2	.031747820	.034205750	.111409264
	1.3	.032489255	.035265343	.122381913
	1.4	.033247917	.036368065	.133686533
63	1.0	.031405797	.033400491	.092024345
	1.1	.032161010	.034446730	.102615611

续表7

H	M	球内 STO_1	球外 STO_2	STO_3
63	1.2	.032927172	.035526661	.113508244
	1.3	.033708335	.036646916	.124723881
	1.4	.034508847	.037814700	.136287857
64	0.9	.031748406	.033566486	.083171902
	1.0	.032533850	.034638571	.093686168
	1.1	.033327219	.035740856	.104495216
	1.2	.034133011	.036880225	.115618933
	1.3	.034955672	.038063951	.127080665
	1.4	.035799786	.039299981	.138907831
65	0.9	.032861912	.034777523	.084633321
	1.0	.033685685	.035904909	.095355182
	1.1	.034518649	.037065556	.106384109
	1.2	.035365644	.038266955	.117741494
	1.3	.036231483	.039517069	.129452511
	1.4	.037121175	.040824676	.141546816
66	0.9	.033998049	.036015006	.086100274
	1.0	.034861519	.037199849	.097031458
	1.1	.035735562	.038421255	.108282399
	1.2	.036625379	.039687367	.119376095
	1.3	.037536190	.041006912	.131839671
	1.4	.038473466	.042389575	.144205185

续表7

<i>H</i>	<i>M</i>	球内 STO_2	球外 STO_2	STO_3
67	0.9	.035156998	.037279221	.087572807
	1.0	.036061571	.038523744	.098715068
	1.1	.036978220	.039808385	.110190202
	1.2	.037912536	.041141995	.122022911
	1.3	.038870177	.042534137	.134242407
68	0.9	.036338946	.038570457	.089050965
	1.0	.037286066	.039876952	.100406036
	1.1	.038246981	.041227386	.112107633
	1.2	.039227437	.042631385	.124182120
	1.3	.040233835	.044099420	.136660989
69	0.9	.037544079	.039889009	.090534795
	1.0	.038535229	.041259837	.102104589
	1.1	.039541849	.042678709	.114034813
	1.2	.040570411	.044156093	.126353908
	1.3	.041627565	.045703456	.139095695
70	0.8	.037746188	.039839293	.080587356
	0.9	.038772589	.041235174	.092024345
	1.0	.039809288	.042672767	.103810713
	1.1	.040863369	.044162813	.115971864
	1.2	.041941795	.045716691	.128538464
71	0.8	.038952739	.041147976	.081877475
	0.9	.040024664	.042609256	.093519663

续表7

H	M	球内 STO_2	球外 STO_2	STO_3
71	1.0	.041108476	.044116119	.105524363
	1.1	.042211734	.045680166	.117918915
	1.2	.043341931	.047313765	.130735986
72	0.8	.040181576	.042482584	.083171902
	0.9	.041300500	.044011561	.095020801
	1.0	.042433026	.045590276	.107245796
	1.1	.043587228	.047231247	.119876095
73	0.8	.041432861	.043843355	.084470668
	0.9	.042600291	.045442398	.096527809
	1.0	.043783178	.047095627	.108975039
	1.1	.044990143	.048816543	.121843539
74	0.8	.042706755	.045230539	.085773804
	0.9	.043924234	.046902085	.098040739
	1.0	.045159172	.048632568	.110712178
	1.1	.046420776	.050436554	.123821384
75	0.8	.014003421	.046644391	.087081340
	0.9	.045272530	.048390940	.099559646
	1.0	.046561254	.050201503	.112457300
76	0.8	.045323024	.048085168	.088393309
	0.9	.046645381	.049909289	.101084585
	1.0	.047989671	.051802842	.114210498

续表7

H	M	球内 STO_2	球外 STO_2	STO_3
77	0.8	.046665729	.049553129	.089709742
	0.9	.048042990	.051457462	.102615611
78	0.8	.048031704	.051048538	.091030674
	0.9	.049465565	.053035792	.104152782
79	0.8	.049421118	.052571661	.092356138
	0.9	.050913315	.054644620	.105696157
80	0.7	.049301144	.052034982	.080587356
	0.8	.050834141	.054122768	.093686168
	0.9	.052386452	.056284292	.107245796

续表7

H	STO_1	H	STO_1	H	STO_1
55	.183460255	64	.213481024	73	.243501793
56	.186795896	65	.216816665	74	.246837434
57	.190131537	66	.220152306	75	.250173075
58	.193467178	67	.223487947	76	.253508716
59	.196802819	68	.226823588	77	.256844357
60	.200138460	69	.230159229	78	.260179998
61	.203474101	70	.233494870	79	.263515639
62	.206809742	71	.236830511	80	.266851280
63	.210145383	72	.240166152		

续表7

M	STO_0	M	STO_0
0.7	.168407743	1.3	.312757246
0.8	.192465998	1.4	.336815496
0.9	.216524247	1.5	.360873746
1.0	.240582497	1.6	.384931995
1.1	.264640747	1.7	.408990245
1.2	.288698996		

(十七) 图3中曲线的数据

表8 图3中曲线的数据

a	$g_{引}$	$g_{斥}$	Δg
a_0	3.36	3.36	0
1.60	2.74	3.72	0.98
1.80	2.16	4.18	2.02
2.00	1.75	4.65	2.90
2.25	1.38	5.23	3.85
2.50	1.12	5.81	4.69
2.75	0.93	6.39	5.49
3.00	0.78	6.97	6.19
3.25	0.66	7.55	6.89
3.50	0.57	8.13	7.56

续表8

a	g_{BI}	$g_{\text{正}}$	Δg
3.75	0.50	8.71	8.21
4.00	0.44	9.29	8.85
4.25	0.39	9.87	9.48
4.50	0.35	10.45	10.10

八、增 补

(一) 文献[1]的原文

§1. 引力论普遍公式 设有两个质点 A 和 B (图12), 沿连线方向有力相互作用, 力与质量成正比, 与距离的某一函数 $f(r)$ 成正比。如果把这两个质点的质量叫做 m 和 m' , 相互作用的力叫做 P , 那么这个力的表达式就是

$$P = \mu mm' f(r) \quad (45)$$

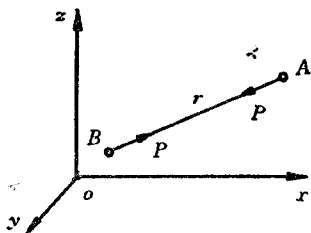


图 12

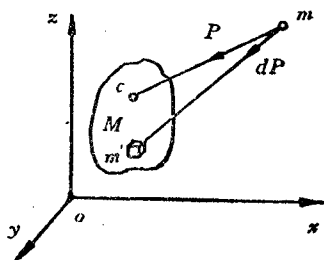


图 13

其中 μ 是一个比例因子。相互作用的力可以是引力或者是斥力, 由 P 的符号指出。

设有连续物体 M (图13), 吸引质量为1的一个质点 m , 引力与物体各质点的质量以及距离的某一函数 $f(r)$ 成正比。为求出这物体对质点所作用的力, 进行如下。用与坐标平面平行的平面, 把整个物体分成许多无限小的正六面体, 先求每一个正六面体的质量对质点所作用的力, 然后求所有

这些力的合力，这些力显然是有合力的，因为它们都作用在一个质点上。

把点 m 的坐标叫作 x, y, z ，把无限小正六面体 m' 的坐标叫做 ξ, η, ζ ，质量 m' 用体积与体积密度的乘积来表示：

$$m' = \rho d\xi d\eta d\zeta$$

质点 m' （即无限小正六面体）对质点 m 的引力就是：

$$dP = \mu m m' f(r) = \mu \rho d\xi d\eta d\zeta f(r)$$

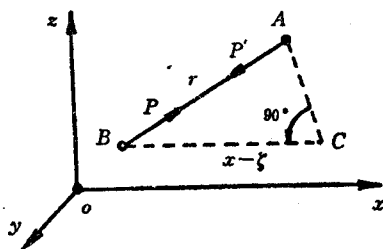


图 14

（因为我们取 $m=1$ ）。把这个式子分别乘以力与各坐标轴夹角的余弦，就得出这个力沿各坐标轴方向的分量。把吸引点的各坐标分别减去被吸引点的各个对应坐标，再

把所得的差除以两点间的距离，我们就得到各夹角的余弦。

所以，如果由点 $A(x, y, z)$ 吸引（图14），则 $\cos(\widehat{P, x})$ 是正的，并且从直角三角形 ABC 有：

$$\cos(\widehat{P, x}) = \frac{x - \xi}{r}$$

而如果由点 $B(\xi, \eta, \zeta)$ 吸引，则 $\cos(\widehat{P', x})$ 就是负的，并且有：

$$\cos(\widehat{P', x}) = \frac{\xi - x}{r} = -\frac{x - \xi}{r}$$

于是力 dP 沿各坐标轴的分量就是：

$$dX = -\mu \rho d\xi d\eta d\zeta \frac{x - \xi}{r} f(r)$$

$$dY = -\mu \rho d\xi d\eta d\zeta \frac{y-\eta}{r} f(r)$$

$$dZ = -\mu \rho d\xi d\eta d\zeta \frac{z-\zeta}{r} f(r)$$

整个物体的引力沿各坐标轴的分量用这些式子的三重积分来表示，积分须遍及全数各正六面体：

$$\left. \begin{aligned} X &= -\mu \iiint \rho f(r) \frac{x-\xi}{r} d\xi d\eta d\zeta \\ Y &= -\mu \iiint \rho f(r) \frac{y-\eta}{r} d\xi d\eta d\zeta \\ Z &= -\mu \iiint \rho f(r) \frac{z-\zeta}{r} d\xi d\eta d\zeta \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

公式(46)是根据引力推导出来的；如果是斥力，结果还是一样，不过符号相反。

§2. 物体作用于质点的引力的势函数【定理】 如果有任意一个物体相互作用于一个质点，那么引力具有力函数，即引力的分量恒为坐标的某一函数对各坐标的偏导数。

我们取质点位在物体外部的情形来证明这个定理，在这种情形下， r 决不等于零。令

$$\Phi(r) = \int f(r) dr$$

取函数 $\Phi(r)$ 对坐标 x, y, z 的偏导数，这时候我们用坐标来表示 r ：

$$r = [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]^{\frac{1}{2}}$$

于是对 x 的偏导数就等于

$$\frac{\partial \Phi(r)}{\partial x} = f(r) \frac{\partial r}{\partial x} = f(r) \frac{x-\xi}{r}$$

利用这个式子，公式(46)中分量 X 的表达式可以写成：

$$X = -\mu \iiint \rho \frac{\partial \Phi(r)}{\partial x} d\xi d\eta d\zeta$$

容易看出，函数

$$U = -\mu \iiint \rho \Phi(r) d\xi d\eta d\zeta$$

对点 m 的坐标 x, y, z 的偏导数就等于力的分量。事实上，把 U 对 x 微分：

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\mu \iiint \rho \frac{\partial \Phi(r)}{\partial x} d\xi d\eta d\zeta,$$

这就得出了表示分力 X 的那个公式。由此可见

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

所以，不管引力定律是怎样的，引力恒有力函数。

只在被吸引点位于吸引物体之外这种情形下，我们才能认为这定理已经证明了。如果质点位在物体的里面，那么对于与质点毗连的各元，公式(46)里及 U 的表达式里的被积函数，可能趋于无限大（当力与距离的正幂次方成反比的时候）；在这种情形下的积分，必须另外特别考虑。

我们来指出，在引力的某些情形下，力函数 U 的形式。如果力正比于距离， $f(r) = r$ ，我们就有：

$$\Phi(r) = \int r dr = \frac{1}{2} r^2$$

而力函数就表示成这样：

$$U = -\frac{1}{2} \mu \iiint \rho r^2 d\xi d\eta d\zeta \quad (47)$$

对牛顿引力，即与距离平方成反比的引力， $f(r) = \frac{1}{r^2}$ ，我们

就有:

$$\Phi(r) = \int \frac{dr}{r^2} = -\frac{1}{r}$$

而力函数就表示成这样:

$$U = \mu \iiint \rho \frac{1}{r} d\xi d\eta d\zeta \quad (48)$$

§3. 与距离成正比的引力 公式(46)里的体积分,在大多数的引力规律 $f(r)$ 的情形下,都是相当繁复的过程,而物体形状愈复杂,积分过程也就愈复杂。但是有一个引力规律,使积分与物体形状无关,这个定律就是,引力正比于距离,因而 $f(r)=r$ 。

如果在公式(46)中 X 的表达式里用 r 代替 $f(r)$,那么这个分量的表达式就化简成:

$$X = -\mu \iiint \rho(x-\xi) d\xi d\eta d\zeta$$

把右边分解成两个积分,并且注意到 x 与变量 ξ, η, ζ 无关, X 的表达式就成为:

$$X = -\mu(x \iiint \rho d\xi d\eta d\zeta - \iiint \rho \xi d\xi d\eta d\zeta)$$

我们知道,

$$\iiint \rho d\xi d\eta d\zeta = M$$

$$\iiint \rho \xi d\xi d\eta d\zeta = M \bar{\xi}$$

其中 M 为吸引物体的质量而 $\bar{\xi}$ 是重心的坐标,因此

$$X = -\mu M(x - \bar{\xi})$$

$$Y = -\mu M(y - \bar{\eta})$$

$$Z = -\mu M(z - \bar{\zeta})$$

这就是表示质量 M 的物体对质量等于1的质点的引力分量的公式。引力本身的表达式为:

$$P = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \mu M \sqrt{(x - \bar{\xi})^2 + (y - \bar{\eta})^2 + (z - \bar{\zeta})^2} \\
&= \mu M R
\end{aligned} \tag{49}$$

其中 R 为质点至吸引物体重心的距离。因此，这个力与坐标轴夹角的余弦就等于：

$$\frac{X}{P} = -\frac{x - \bar{\xi}}{R}, \quad \frac{Y}{P} = -\frac{y - \bar{\eta}}{R}, \quad \frac{Z}{P} = -\frac{z - \bar{\zeta}}{R}$$

如果我们设想这物体全部质量集中于重心 $C(\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{\zeta})$ (图13)，那么当这个点(重心)对所给质点 m 依同一规律吸引时，它的引力就恰好是(当 $m = 1$)

$$P = \mu M R$$

由此推得：

【定理】 当力与距离成正比时，不管物体具有怎样的形状，物体对一个质点的吸引，就正如物体全部质量集中于在重心依同一规律吸引这个质点一样。

(二) “全天相干”的比喻

向平静的湖面上投一石子，我们在岸上看到许多同心圆的波浪，圆心就是那块石子落水的地方。

当观测者的眼睛紧挨着水面时。如果观测者的位置恰好在石子落水的地方，他将看到自己周围有一圈一圈的同心圆水波。如果观测者的位置不在石子落水的地方，那么他就观测不到各向同性的同心圆水波。

类星体红移值的空间分布呈现规律性，而这个规律是各向同性，这意味着我们位于扰动中心。

除了正文推荐的参考书之外还有下列文章可供参阅。

●方励之、褚耀泉、刘永镇、曹盛林：《类星体红移分

布中的周期性与早期宇宙中的密度波涨落》，天文学报，1983年9月。

- ⑦ 邓祖淦、周又元、载和俊：《类星体发射线红移的分布与宇宙学红移》中国科学，A辑，1985年6月。

(三) 哈勃常数的观测值

研 究 者	年 代	H	备 注
哈勃	1936	526	最初的测定
巴德	1952	260	距离指标法
桑达奇	1962	95	距离指标法
拉辛和桑达奇	1968	77	距离指标法
艾贝尔和伊蒙斯	1971	50	距离指标法
桑达奇和塔曼	1976	55	七种距离指标
伏古勒	1978	100	距离指标法
范登堡	1968	95	超新星光度
柯希纳和关	1976	49	超新星膨胀
林登贝尔	1978	110	射电源超光速膨胀
赫尔芳德		15—45	Physics Today 1983.10月

- ⑧ 中国大百科全书《天文学》，第108页。
- ⑨ H.L. 西普门：《黑洞、类星体和宇宙》科学出版社，1987年，第341页。
- ⑩ J.L. 塞锡克：《河外天文学》科学出版社，1987年，第214页。
- ⑪ S. 温伯格：《引力论和宇宙论》邹振隆译，科学出版社，

1984年，第517页。

●容建湘。《恒星天文学》，第89页，高等教育出版社，1986年。

●郭万稳，何香涛，李宗伟和曹盛林。《宇宙距离和哈勃常数》北京师范大学学报(自然版)，1988年第3期。

(四) 宇宙年龄

众所周知，在我们所观测到的天体中，球状星团是最古老的天体。所以，宇宙的年龄一定要比球状星团的年龄大。

“与现在形态相似的宇宙年龄是 15×10^9 年”。

——参考文献〔7〕第352页

“大多数球状星团的年龄为90—100亿年。”

——参考文献〔9〕第394页

“太阳系大约诞生于45亿年之前，而形成太阳系中重元素的那些超新星爆发，大约在50亿到110亿年前发生的”。

——方励之，R·鲁菲尼，《相对论天体物理的基本概念》，第166页

“大约十年前，海尔天台的桑代奇得到球状星团的年龄大约是100—150亿年。以后的研究工作发现，这个数值要稍微修正。最近的两个研究工作估计这些最老星团的年龄为140—200亿年和140—160亿年。”

——H.L.西普门，《黑洞、类星体和宇宙》，第328页

“铀-238经过几十亿年后最终将变成铅-206。我们可以通过检验这种衰变的进程来测量原子的年龄。这里所使用的检查方法是极其复杂的，施拉蒙最近在《科学美国人》上发

表的文章详细地介绍了这种方法。目前的研究结果表明，最老的原子的年龄为70—200亿年。这里所说的年龄是指大爆炸后超新星爆发所产生的重元素的年龄。当然这只是一个平均年龄。由于这些重元素是在相当长的一段时间内产生的，我们不可能准确地估计银河系里第一个超新星爆发的时间。我们也不可能定出大爆炸时产生的原子的年龄，因为这些原子不具有放射性。”

——同上

“虽然恒星和重元素原子的年龄比整个宇宙的年龄稍微小一些，但它们的年龄都落在大致同样的区间：100到200亿年。没有发现哪一个天体的年龄明显地比上述数值大，这表明，至少对银河系来说，它是诞生于过去某个有限的时刻。宇宙的年龄同银河系的100—200亿年相比又怎样呢？如果两个年龄差不多，我们就有证据说宇宙起始于过去某个确定的时刻——大爆炸时刻。”

——同上

“作为一个特殊的例子，我们来考虑长蛇座星系团。它的退行速度是61000公里/秒。按照哈勃定律，它的距离是61000除以 H ，取 H 为50公里/秒·百万秒差距，可得1220百万秒差距。逆着时间次序来追溯这个膨胀，你会发现，如果膨胀速度是常数，长蛇座星系团走完这段距离所需的时间为 6.17×10^{17} 秒，即196亿年。”

——同上，第329页

“特鲁兰等人最近研究了氦的这个难题。他们得出结论说，如果氦是由天体物理过程产生的，那它必定是由低质量恒星制造出来的。这种推测意味着银河系年龄应为200—300亿年。对于任何大爆炸宇宙学来说这个数字都大得难以容

忍。”

——J.辛格,《现代宇宙学的观念和理论》,第277页

“因为有些较老的星系据信已有150亿年到250亿年的年龄”

——同上,第149页

(五) 宇宙的质量和密度

“设 H 目前的公认值为15公里/秒·Mpc,临界密度为 4.5×10^{-30} 克/厘米³。”

——S·温伯格,《最初三分钟》,第135页

“取 H 目前被接受的值50公里/秒·Mpc,得到临界密度为 4×10^{-30} 克/厘米³。”

——W·伦德勒,《相对论精义》,第278页

“第三种方法是测定从宇宙创生以来氘的残余量。氘是氢的同位素,它也称为“重氢”。在从氢转变为氦的热核反应链中,它是一个重要的台阶。正如在第六章中我已讲到的,某些原生的氢在宇宙大爆炸后不久就转变成了氦。在这个过程中,某些氘被遗留下来。在从轻的氢原子转变为重的氦原子的热核反应链中有氘出现。当宇宙规模的热核反应停止下来时,那些还没有转变为氦的氘就留下来了。这种原生氘的数量对早期宇宙的膨胀速率和密度十分敏感。从人造卫星观测所测定的氘的丰度,明显地表明宇宙的平均密度比临界密度要小得多。这就又一次说明,我们是生活在一个开放的双曲形宇宙中。”

——W.J.卡夫曼,《星系和类星体》,第149页

“宇宙内已观测到的部分内的星系物质的平均密度为

$$2 \times 10^{-31} \text{克} \cdot \text{厘米}^{-3} . ”$$

——文献〔7〕第352页

“宇宙密度的观测值为 10^{-30} 克/厘米³。”

——J.辛格,《现代宇宙学的观念和理论》,第150页

“宇宙的质量 $M \leq 10^{52}$ 千克。”

——马丁·哈威特,《天体物理学概念》,第542页

“宇宙的质量范围是 $0.2 \times 10^{52} - 10 \times 10^{52}$ 千克。”

——中国科学技术情报所索书号1031375

(六) 视平均绝对星等

亮度 决定于光源的发光功率和观测者距离光源的远近。

视感 人类的视觉特性是,当亮度增加一倍时,光感并不增加一倍。经过心理学家的研究得出的规律是

$$dm = -c \frac{dE}{E} \quad (50)$$

式中 m 是光感(星等), dm 是光感的变化; E 是亮度, dE 是亮度的变化; c 是比例常数。负号的意义是亮度减小时星等的数值增大。

积分(50)式,得

$$m = -c \ln E + C$$

其中 C 是积分常数。对于其它的光源也有同样的公式:

$$m_0 = -c \ln E_0 + C$$

两式相减得

$$m_0 - m = c \ln \frac{E}{E_0}$$

也可以写成

$$\frac{E}{E_0} = e^{(m_0 - m)/c} = (e^{\frac{1}{c}})^{m_0 - m} = K^{m_0 - m}$$

取 $m_0 - m = 1, 2, 3, 4, \dots$, 可得 $\frac{E}{E_0} = K, K^2, K^3, K^4, \dots$. 这表示, 当亮度以几何级数变化时, 光感 (视星等) 则以算术级数变化。

设两颗星的星等分别为 m 和 n , 则有

$$\frac{E_m}{E_n} = K^{n-m}$$

或

$$\lg \frac{E_m}{E_n} = (n-m) \lg K$$

常数 K 由观测决定。

视星等 早期天文学家把天上最亮的恒星定为 1 等星, 最暗的也就是肉眼刚刚能够看到的星定为 6 等星。根据观测知道 1 等星的亮度是 6 等星的 100 倍, 于是得到 $\lg K = 0.4$ 和 $K = 10^{0.4} = 2.512$ 。所以

$$n-m = 2.5 \lg \frac{E_m}{E_n} \quad (51)$$

和

$$\frac{E_m}{E_n} = 2.512^{n-m} \quad (52)$$

上式的意义是明显的, 当 1 等星的亮度是 2 等星的 2.512 倍时, 人的感觉是 1 等星比 2 等星亮一倍。这里要注意的是, 亮度与明亮的程度 (光感) 的区别。亮度是眼睛接受到的辐射功率, 而明暗的比较是人的神经功能。

绝对星等 把一颗星放在离我们10秒差距(pc)的地方, 它所呈现的视星等定义为绝对星等, 用字母 M 表示。

有一颗星, 当它的视星等为 m 时, 与我们的距离是 r_m , 把它移到距离为 r_n 的地方, 它的视星等变成 n 。由光学知道, 亮度与距离的平方成反比:

$$\frac{E_m}{E_n} = \frac{r_n^2}{r_m^2}$$

但是, 亮度与视星等有关系 (52), 于是

$$\frac{r_n^2}{r_m^2} = 2.512^{n-m}$$

按着绝对星等的定义, 有

$$\frac{10^2}{r^2} = 2.512^{n-m}$$

式中 r 是任意距离, 单位是 pc ; m 是对应于 r 的视星等。通常写成

$$M - m = 5 - 5 \lg r$$

当 r 的单位是 $M pc$ 时, 上式成为

$$m = M - 5 + 5 \lg(r \times 10^6)$$

即

$$m = M + 5 \lg r + 25$$

本书中的 r 一律用 $G pc$, 故有公式 (41)。

视平均绝对星等 各个星系的绝对星等是不同的, 把所有的星系的绝对星等取算术平均值, 就得到平均绝对星等 $\overline{M}$ 。由于这里指的是视星等, 所以叫视平均绝对星等 $\overline{M}_v$ 。虽然每一个星系, 它的绝对星等并不是平均值, 但是平均值对它却有一定的代表性。